This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

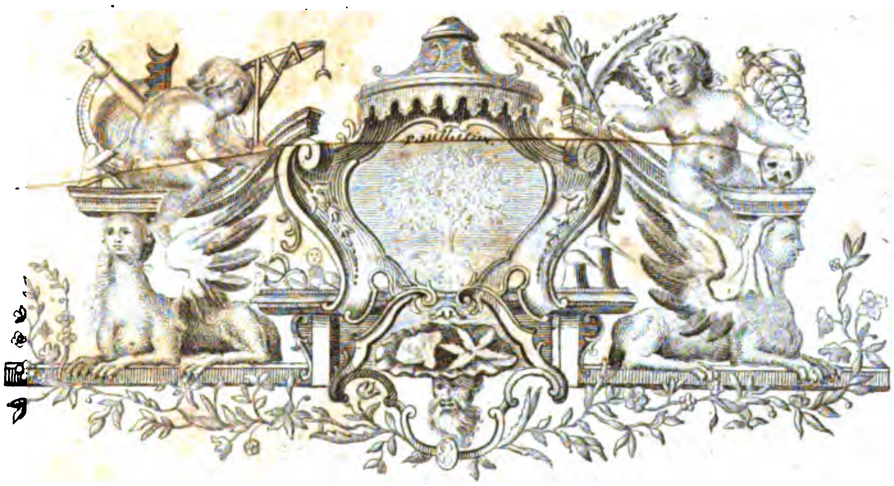
~~Imperfect; plate V is wanting.~~

Petersburg, Russia — Academie des Sciences.

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS XIV.

AD ANNVM MDCCXLIV - XLVI.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE.
MDCCLI.

Lian 3923.5

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

METHODVS INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES VNICAM VARIABILEM INVOLVENTES.

AVCTORE

L. Eulero.

§ 1.

Omnes formulae differentiales, quarum integrationem hic ſum traditurus, continentur in hac forma generali $X\,dx$, vbi X denotat functionem quamcunque rationalem ipſius x. Cum igitur omnis functio rationalis ſit vel integra vel fracta, tractatio noſtra eſſet bipartita ~~conſtituenda, niſi integratio illis caſibus~~, quibus X eſt functio integra, nulla laboraret difficultate. Si enim X huiusmodi eſt functio, denominatore, qui quidem variabilem x complectatur, deſtituta, ſemper ad hanc formam reuocabitur, vt ſit:

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 \text{ etc.}$$

hocque caſu erit

$$\int X\,dx = \Delta + Ax + \tfrac{1}{2}Bx^2 + \tfrac{1}{3}Cx^3 + \tfrac{1}{4}Dx^4 + \tfrac{1}{5}Ex^5 + \text{ etc.}$$

vbi Δ conſtantem quamcunque denotat. Latius autem ratio huius integrationis patet, atque ad exponentes ipſius x non ſolum integros affirmatiuos ſed etiam negatiuos et fractos extenditur. Ita ſi m, n, p, q etc. exponant numeros quoscunque ſiue integros ſiue fractos, ſiue poſitiuos ſiue negatiuos, fueritque

 X =

$$X = Ax^m + Bx^n + Cx^p + Dx^q \text{ etc.}$$

erit, vti ſponte patet

$$\int X dx = \tfrac{1}{m+1} Ax^{m+1} + \tfrac{1}{n+1} Bx^{n+1} + \tfrac{1}{p+1} Cx^{p+1} + \tfrac{1}{q+1} Dx^{q+1} \text{ etc.}$$

Quae cum ſint iam fere triuialia, huic priori generi, quo X eſt functio ipſius x integra, amplius non immoror, ſed ad functiones, quae forma exprimuntur fracta, progredior.

§. 2. Sit igitur X functio quaecunque fracta ipſius x, numeratore ac denominatore contenta, atque ſemper in huiusmodi forma latiſſime patente continebitur:

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

De qua primum obſerua, ſi x in numeratore tot vel plures habeat dimenſiones quam in denominatore, formulam ad aliam reuocari poſſe, in qua ſumma ipſius x dimenſio in numeratore minor ſit quam in denominatore: quae reducta vti conſtat diuiſione abſoluitur, ſi enim ſit

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} \text{ fiet}$$

$$X = \tfrac{E}{\delta} x + \frac{A + (B - \frac{E\alpha}{\delta})x + (C - \frac{E\beta}{\delta})x^2 + (D - \frac{E\gamma}{\delta})x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

atque vlterius reſoluendo

$$X = \tfrac{E}{\delta} x + (\tfrac{D}{\delta} - \tfrac{E\gamma}{\delta\delta}) + \frac{A - \frac{D\alpha}{\delta} + \frac{E\alpha\gamma}{\delta\delta} + (B - \frac{E\alpha}{\delta} - \frac{D\beta}{\delta} + \frac{E\beta\gamma}{\delta\delta})x + (C - \frac{E\beta}{\delta} - \frac{D\gamma}{\delta} + \frac{E\gamma\gamma}{\delta\delta})xx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

Cum iam prioris partis $\frac{E}{\delta} x + \frac{D}{\delta} - \frac{E\gamma}{\delta\delta}$, ſi per dx multipli-

tiplicetur, integratio ſit obuia, tota difficultas ad integrationem partis poſterioris, quae eſt vera forma fracta, reducitur. Ideoque cardo rei verſatur in integratione huiusmodi formae X dx, ſi fuerit:

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

vbi quidem ſumma poteſtas ipſius x in numeratore minor ſit, quam ſumma poteſtas ipſius x in denominatore. Ex quo regulas ſequentes tantum ad huiusmodi formulas ſum relaturus.

§. 3. Si in denominatore terminus primus α vel aliquot termini initiales deſint ſeu euaneſcant, integratio multum leuari atque ad caſum faciliorem, quem poſtmodum tractabimus, reduci poteſt. Reductio autem in hoc conſtat, quod denominatur tum habeat vnum factorem cognitum, qui erit vel x, vel x^2, vel x^3, etc. prout vnus pluresue termini initiales denominatoris euaneſcant, ideoque poterit fractio propoſita in duas alias fractiones reſolvi, quarum altera, cum habeat poteſtatem ipſius x ſimplicem pro denominatore, nullo negotio integratur, ita vt tantum altera remaneat, cuius integrale quaeratur. Sic ſi primus tantum terminus denominatoris deſit, erit formula differentialis propoſita huiusmodi.

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})}\, dx$$

quae aequalis eſt his duabus iunctim ſumtis

$$\frac{A}{\alpha x}\, dx + \frac{(B - \frac{A\beta}{\alpha}) + (C - \frac{A\gamma}{\alpha})x + (D - \frac{A\delta}{\alpha})x^2 + (E - \frac{A\varepsilon}{\alpha})x^3 \text{ etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\, dx$$

quarum prioris partis $\frac{A\,dx}{\alpha x}$ integrale eſt $\frac{A}{\alpha} l x$. poſterioris vero partis integrale methodo deinceps tradenda reperiri debet.

§. 4. Si bini termini initiales denominatoris euaneſcant, formula differentialis erit huiusmodi.

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{x^2(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}\cdot dx$$

quae vt reſoluatur in duas fractiones factores hos denominatoris pro denominatoribus habentes, ponatur ea aequalis his duabus fractionibus;

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{x^2}dx+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}dx$$

Addantur hae fractiones more conſueto, ac denominator ſummae quidem ſponte aequalis fiet denominatori fractionis propoſitae; numerator autem erit;

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{a}\beta x+\mathfrak{a}\gamma x^2+\mathfrak{a}\delta x^3+\mathfrak{a}\varepsilon x^4+\text{ etc.}\\ \quad+\mathfrak{b}\alpha x+\mathfrak{b}\beta x^2+\mathfrak{b}\gamma x^3+\mathfrak{b}\delta x^4+\text{ etc.}\\ \qquad\qquad+\mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}x^3+\mathfrak{C}x^4+\text{ etc.}\end{array}\right\} dx$$

qui vt numeratori propoſito aequalis fiat, termini ſinguli homologi aequentur vnde elicietur.

$$\mathfrak{a}=\frac{A}{\alpha}$$

$$\mathfrak{b}=\frac{B}{\alpha}-\frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}-\frac{A\beta}{\alpha^2}$$

$$\mathfrak{A}=C-\frac{A\gamma}{\alpha}-\frac{B\beta}{\alpha}+\frac{A\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\mathfrak{B}=D-\frac{A\delta}{\alpha}-\frac{B\gamma}{\alpha}+\frac{A\beta\gamma}{\alpha^2}$$

$$\mathfrak{C}=E-\frac{A\varepsilon}{\alpha}-\frac{B\delta}{\alpha}+\frac{A\beta\delta}{\alpha^2}$$

etc.

His

His coefficientibus initio aſſumtis determinatis innoteſcent binae fractiones ſimpliciores, in quas propoſita reſoluitur; ac prioris quidem $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{xx}dx$ integrale eſt $= -\frac{\mathfrak{a}}{x} + \mathfrak{b}lx$; ita vt integratio formulae propoſitae iam ad integrationem partis poſterioris reducatur. Ceterum ex ipſa terminorum comparatione intelligitur non opus fuiſſe, vt numeratori fractionis prioris $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x$ plures quam duos terminos tribueremus; cum litterarum determinandarum numerus hoc modo cum numero aequationum congruat: vnicus autem terminus α ad hoc non ſuffeciſſet, eo quod ſi poſuiſſemus $\mathfrak{b}=0$, ſecundae aequationi $B=\mathfrak{a}\beta$ ob $\mathfrak{a}$ iam determinatum ſatisfieri non potuiſſet.

§. 5. Ponamus iam tres terminos initiales denominatoris formulae initio propoſitae abeſſe; ac formula differentialis integranda erit huiusmodi

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{x^3(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}\,dx$$

quae in duas fractiones hujus formae reſolui poterit:

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2}{x^3}\,dx+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}\,dx$$

quarum ſummae denominator cum denominatore propoſito congruit, numerator vero erit

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{a}\beta x+\mathfrak{a}\gamma x^2+\mathfrak{a}\delta x^3+\mathfrak{a}\varepsilon x^4+\text{etc.}\\&\quad+\mathfrak{b}\alpha x+\mathfrak{b}\beta x^2+\mathfrak{b}\gamma x^3+\mathfrak{b}\delta x^4+\text{etc.}\\&\qquad+\mathfrak{c}\alpha x^2+\mathfrak{c}\beta x^3+\mathfrak{c}\gamma x^4+\text{etc.}\\&\qquad\quad+\mathfrak{A}x^3+\mathfrak{B}x^4+\text{etc.}\end{aligned}$$

qui vt aequalis reddatur numeratori propoſito debebit eſſe

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\alpha}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha} = \frac{B}{\alpha} - \frac{A\beta}{\alpha^2}$$
$$\mathfrak{c} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\beta}{\alpha} = \frac{C}{\alpha} - \frac{A\gamma}{\alpha^2} - \frac{B\beta}{\alpha^2} + \frac{A\beta^2}{\alpha^3}$$

atque

$$\mathfrak{A} = D - \frac{A\delta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} + \frac{2A\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{C\beta}{\alpha} + \frac{B\beta^2}{\alpha^2} - \frac{A\beta^3}{\alpha^3}$$
$$\mathfrak{B} = E - \frac{A\varepsilon}{\alpha} - \frac{B\delta}{\alpha} + \frac{A\beta\delta}{\alpha^2} - \frac{C\gamma}{\alpha} + \frac{A\gamma\gamma}{\alpha^2} + \frac{B\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{A\beta^2\gamma}{\alpha^3}$$

etc.

Apparet igitur nec plures nec pauciores terminos pro numeratore fractionis prioris accipi oportuiſſe, quam tres; atque ex natura rei generaliter intelligitur pro numeratore prioris fractionis tot terminos aſſumi debere, quoad perveniatur ad exponentem ipſius x vnitate minorem, quam continet exponens denominatoris, ſeu quod eodem redit, numerator tot terminos habere debet, quot vnitates continet exponens denominatoris.

§. 6. Ex his iam ſatis patet modus, quemadmodum fractio differentialis, cuius denominator factorem habeat, qui ſit poteſtas ipſius x, cuiusmodi eſt

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x^n(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})}\,dx$$

reſolui debeat in binas alias fractiones, quarum denominatores ſint hi bini factores ſeorſim ſumti. Scilicet ea transmutabitur in huiusmodi binas formulas:

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{n}x^{n-1}}{x^n}\,dx$$
$$+ \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\,dx$$

habe-

habebuntque coefficientes aſſumti hos valores:

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\alpha}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha}$$
$$\mathfrak{c} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\beta}{\alpha}$$
$$\mathfrak{d} = \frac{D}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\delta}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{c}\beta}{\alpha}$$
etc.

$$\mathfrak{A} = P - \mathfrak{n}\beta - \mathfrak{m}\gamma - \mathfrak{l}\delta - \mathfrak{k}\varepsilon - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = Q - \mathfrak{n}\gamma - \mathfrak{m}\delta - \mathfrak{l}\varepsilon - \mathfrak{k}\zeta - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = R - \mathfrak{n}\delta - \mathfrak{m}\varepsilon - \mathfrak{l}\zeta - \mathfrak{k}\eta - \text{etc.}$$
etc.

vbi in numeratore propoſito $A + Bx + Cx^2 +$ etc. denotat P coefficientem poteſtatis x^n, et Q coefficientem poteſtatis x^{n+1}, et R coefficientem poteſtatis x^{n+2}, et ita porro. Hac ergo facta reſolutione prioris fractionis integrale eſt in promtu per §. 2, ita vt ad plenam integrationem ſupereſt modus integrandi fractionem poſteriorem. Hanc obrem tota difficultas huc redit, vt modus tradatur integrandi huiusmodi formulam

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}} \cdot dx$$

in cuius denominatore primus terminus α non ſit $= 0$.

§. 7. Caſus ſimpliciſſimus, qui in hac forma continetur, erit, ſi in numeratore omnes termini, praeter primum, in denominatore vero omnes praeter duos primos euaneſcant, ita vt haec habeatur formula integranda:

$$\frac{A}{\alpha + \mathfrak{b}x} dx.$$

Ponatur ea $=dy$; vt ſit $dy=\frac{A\,dx}{\alpha+\mathfrak{b}x}$ erit $\frac{\mathfrak{b}dy}{A}=\frac{\mathfrak{b}\,dx}{\alpha+\mathfrak{b}x}$ quod cum ſit differentiale ipſius $l(\alpha+\mathfrak{b}x)$ erit $\frac{\mathfrak{b}y}{A}=l(\alpha+\mathfrak{b}x)$, ideoque integrale quaeſitum

$$\int\frac{A}{\alpha+\mathfrak{b}x}dx=y=\frac{A}{\mathfrak{b}}l(\alpha+\mathfrak{b}x)$$

ſeu adiiciendo conſtantem $\int\frac{A}{\alpha+\mathfrak{b}x}=\frac{A}{\mathfrak{b}}l\frac{\alpha+\mathfrak{b}x}{\alpha}$. ſimili modo ſi numerator totus per dx multiplicatus ſit differentiale denominatoris, integratio facile per logarithmos expedietur. Si enim formula integranda ſit:

$$\frac{\mathfrak{b}+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3}{\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}dx$$

integrale erit logarithmus denominatoris, ſcilicet $l(\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)$. Quodſi autem formula differentialis ſit huiusmodi, vt numerator in dx ductus ſit multiplum quodpiam denominatoris, nempe:

$$dy=\frac{n\mathfrak{b}+2n\gamma x+3n\delta x^2+4n\varepsilon x^3}{\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}dx$$

erit pariter per logarithmos integrale quaeſitum

$$y=nl(\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4).$$

§. 8. Deinde etiam alius caſus eſt obuius, ſi denominator ſit quaepiam poteſtas, ac numerator in dx ductus ſit differentiale radicis denominatoris, vel eius multiplum veluti ſi fuerit

$$dy=\frac{n\mathfrak{b}+2n\gamma x+3n\delta x^2+4n\varepsilon x^3}{(\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)^m}dx$$

Ponatur breuitatis ergo denominatoris radix

$$\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4=z$$

erit $(\mathfrak{b}+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3)dx=dz$

huicque

hincque habebitur $dy = \frac{ndz}{z^m}$, cuius integrale erit $y = - \frac{n}{(m-1)z^{m-1}}$ atque valore ipſius z reſtituto prodibit integrale quaeſitum

$$y = - \frac{n}{(m-1)(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)^{m-1}}$$

cui inſuper pro arbitrio quantitatem conſtantem adiicere licet. Praeterea vero etiam vſu venire poteſt, vt integrale ſit quantitas algebraica, etiamſi numerator non ſit ita comparatus, vti in hoc caſu aſſumſimus. Omnes autem hi caſus vna formula comprehendi poterunt, ſi in genere huiusmodi functio

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}}{(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^{m-1}}$$

differentietur; cum enim differentiale huiusmodi habiturum ſit formam:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m} dx$$

huius formulae viciſſim integrale habebitur.

§. 9. His caſibus exceptis, nulla alia via ad huiusmodi formulas differentiales fractas integrandas patet, niſi vt denominator $\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 +$ etc. in ſuos factores ſimplices reſoluatur, vbi quidem, cum non ſit $\alpha = 0$, pro α vnitas ſcribi poteſt, quod opus autem ſaepenumero maximis difficultatibus eſt obnoxium, quas tollere huius non eſt loci. Quanquam enim radicum inueſtigatio, cum qua reſolutio in factores congruit, adhuc non vltra aequationes quatuor dimenſionum generatim eſt perducta, tamen

in integrationum negotio merito nobis reſolutionem aequationum quotcunque dimenſionum concedi poſtulamus. Atque is formulae ſeu aequationis differentialis integrationem perfecte dediſſe cenſendus eſt, qui eam ad reſolutionem ſeu conſtructionem aequationis algebraicae reuocauerit. Quamobrem aſſumamus denominatoris propoſiti:

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}$$

factores ſimplices, in quibus x vnicam habeat dimenſionem, eſſe hos:

$$(1 + px)(1 + qx)(1 + rx)(1 + sx)(1 + tx) \text{ etc.}$$

quorum factorum numerus, vti conſtat, aequalis eſt maximae dimenſioni ipſius x, quam habet in denominatore propoſito. Praeterea vero manifeſtum eſt coefficientes p, q, r, s, etc. cum coefficientibus cognitis α, β, γ, δ, etc. ita eſſe connexos, vt ſit

$\alpha = p + q + r + s +$ etc. = ſummae ſingulorum
$\beta = pq + pr + ps + qr +$ etc. = ſum. factor. ex binis
$\gamma = pqr + pqs + qrs +$ etc. = ſum. factor. ex ternis
$\delta = pqrs + pqrt +$ etc. = ſum. factor. ex quat.
$\epsilon = pqrst +$ etc. = ſum. factor. ex quinis

et ita porro.

Quamobrem has quantitates p, q, r, s etc. tanquam datas ac determinatas per cognitas α, β, γ, δ, etc. iure accipere licet.

§. 10. Hac poſita denominatoris in factores reſolutione, formula differentialis

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}}\, dx$$

abibit in hanc formam:

A +

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{(1+px)(1+qx)(1+rx)(1+sx)\ \text{etc.}} \cdot dx$$

quae porro reſolui poterit in fractiones totidem ſimplices, quot denominator continet factores, ſintque haec fractiones ſimplices differentiales hae:

$$\frac{Pdx}{1+px} + \frac{Qdx}{1+qx} + \frac{Rdx}{1+rx} + \frac{Sdx}{1+sx} + \text{etc.}$$

Patet enim his fractionibus addendis expreſſionem eſſe proditùram ſuperiori ſimilem; namque denominator ſummae ſponte aequalis fiet denominatori oblato: numerator quidem illi non congruens orietur, verum tamen tot non prodibunt dimenſiones ipſius x in numeratore quam in denominatore; quamobrem litterae adhuc ignotae P, Q, R, S, etc. ita determinari poterunt vt numerator ipſi propoſito congruat. Tot enim ſunt litterae P, Q, R, etc. quot x habet dimenſiones in denominatore, totidem vero numerator continet terminos, ita vt haec operatio ſufficiat ad omnes litteras P, Q, R, etc. determinandas. Ex hocque patet ratio, cur x in numeratore pauciores habere debeat quam in denominatore; ſi enim totidem haberet vel plures, litterae aſſumtae P, Q, R, etc. non ſufficerent ad numeratorem propoſitum producendum.

§. 11. Si ad valores litterarum P, Q, R, S etc. inueniendos, omnes fractiones ſimplices actu addere, ac numeratorem reſultantem cum numeratore propoſito congruentem reddere velimus, poterimus quidem valores illarum litterarum P, Q, R, etc. omnium aſſignare, verum ſi numerus fractionum ſimplicium fuerit modicus tantum, labor fere fit inſuperabilis. Eaedem autem aequationes multo facilius eruentur; ſi ſingulae fractiones ſimplices reiicien-

reiiciendo dx per diuiſionem in ſeries conuertantur, quo facto prodibit ſumma omnium per ſeriem expreſſa:

$$
\begin{aligned}
&+P-Ppx+Pp^2x^2-Pp^3x^3+Pp^4x^4-Pp^5x^5+\text{etc.}\\
&+Q-Qqx+Qq^2x^2-Qq^3x^3+Qq^4x^4-Qq^5x^5+\text{etc.}\\
&+R-Rrx+Rr^2x^2-Rr^3x^3+Rr^4x^4-Rr^5x^5+\text{etc.}\\
&+S-Ssx+Ss^2x^2-Ss^3x^3+Ss^4x^4-Ss^5x^6+\text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Quarum ſumma cum aequalis eſſe debeat fractioni propoſitae reiecto pariter factore differentiali dx;

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{etc.}}$$

conuertatur haec pariter per diuiſionem in ſeriem infinitam, quae erit ſeries recurrens:

$$
\begin{array}{llll}
A & -A\alpha x & +A\alpha^2x^2 & -A\alpha^3x^3+ \\
 & +Bx & -B\alpha x^2 & +B\alpha^2x^3- \\
 & & -A\beta x^2 & +2A\alpha\beta x^3- \\
 & & +Cx^2 & -B\beta x^3+ \qquad \text{etc.} \\
 & & & -A\gamma x^3+ \\
 & & & -C\alpha x^3+ \\
 & & & +Dx^3\ - \\
 & & & \quad\ -
\end{array}
$$

Quod ſi iam termini homologi inter ſe comparentur, atque inter ſe aequales reddantur, obtinebuntur ſequentes aequationes:

$$
\begin{aligned}
&P+Q+R+S+\text{etc.}=A\\
&Pp+Qq+Rr+Ss+\text{etc.}=A\alpha-B\\
&Pp^2+Qq^2+Rr^2+Ss^2+\text{etc.}=A(\alpha^2-\beta)-B\alpha+C\\
&Pp^3+Qq^3+Rr^3+Ss^3+\text{etc.}=A(\alpha^3-2\alpha\beta+\gamma)-B(\alpha^2\beta)+C\alpha-D\\
&\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Harum

Harum aequationum, quarum numerus quidem eſt infinitus, capiantur tot, quot habentur litterae determinandae P, Q, R, etc. ex iisque earum valores more conſueto definiantur.

§. 12. Calculus hac methodo inſtituendus fit autem admodum prolixus, ſi plures habeantur litterae determinandae: attamen ſi a ſimplicioribus ad magis compoſita progrediamur, per inductionem certam non difficulter deprehendetur, valores quaeſitos ſequenti modo expreſſum iri, vt ſit:

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})\text{etc.}}$$

$$Q = \frac{A - \frac{1}{q}B + \frac{1}{q^2}C - \frac{1}{q^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{q})(1-\frac{r}{q})(1-\frac{s}{q})(1-\frac{t}{q})\text{etc.}}$$

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{r})(1-\frac{q}{r})(1-\frac{s}{r})(1-\frac{t}{r})\text{etc.}}$$

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{s})(1-\frac{q}{s})(1-\frac{r}{s})(1-\frac{t}{s})\text{etc.}}$$

etc.

Inductio haec, qua valores litterarum P, Q, R, S etc. eruimus, etſi eſt certiſſima, tamen non ſine ingenti moleſtia, atque loco α, β, γ, etc. ſuos valores per p, q, r, s etc. expreſſos ſubſtituendo reperitur, quare cum non cuique liceat hunc calculum repetere alium modum faciliorem idem efficiendi proponamus, cuius ſimul in ſequentibus amplior ſit vſus.

§. 13.

§. 13. In hac methodo tantum ad vnicum factorem $1+px$ tanquam cognitum reſpicimus, atque ſine reſpectu ad reliquos factores ſimplices determinabimus valorem litterae P pro fractione ſimplici vna $\frac{P\,dx}{1+px}$. Pari deinceps ratione, qua vna fractio ſimplex eſt inuenta reperientur reliquae omnes $\frac{Q\,dx}{1+qx}$, $\frac{R\,dx}{1+rx}$, etc. quarum omnium ſumma aequetur formulae differentiali propoſitae. Diſcerpamus igitur formulam differentialem propoſitam

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{ etc.}}\,dx$$

in cuius numeratore pauciores ineſſe ponimus dimenſiones ipſius x quam in denominatore; diſcerpamus inquam hanc formulam in binas partes quarum altera ſit $=\frac{P\,dx}{1+px}$, alterius vero denominator erit quotus qui reſultat, ſi ille denominator formulae propoſitae per $1+px$ diuidatur, id quod vtique fieri poteſt, cum $1+px$ ſit factor illius denominatoris. Ponamus quotum ex hac diuiſione oriundum eſſe $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc. in quo ergo maximus dimenſionum numerus ipſius x vnitate deficit ab illo, quem habet in denominatore primo

$$1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{ etc:}$$

Sit igitur altera pars praeter $\frac{P\,dx}{1+px}$, in quam formula propoſita reſoluitur haec

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{ etc.}}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+\text{etc.}}\,dx$$

vbi ob eandem rationem in numeratore x pauciores habere debet dimenſiones quam in denominatore.

§. 14.

§. 14. Cum igitur ſumma harum duarum formularum

$$\frac{\mathrm{P}\,dx}{1+px}+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{ etc.}}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4\text{ etc.}}\,dx$$

aequalis eſſe debeat formulae propoſitae

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\mathrm{E}x^4+\text{ etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{ etc.}}\,dx$$

primum ob denominatores aequales habebitur

$$\begin{array}{ll}\alpha=\mathfrak{a}+p & \mathfrak{a}=\alpha-p\\ \beta=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}p & \mathfrak{b}=\beta-\alpha p+p^2\\ & \text{etc.}\\ \gamma=\mathfrak{c}+\mathfrak{b}p & \mathfrak{c}=\gamma-\beta p+\alpha p^2-p^3\\ \delta=\mathfrak{d}+\mathfrak{c}p & \mathfrak{d}=\delta-\gamma p+\beta p^2-\alpha p^3+p^4\\ \text{etc.} & \text{etc.}\end{array}$$

Vel cum formulae $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc. factores ſint $(1+qx)(1+rx)(1+sx)$ etc. fiet $\mathfrak{a}$ quantitatum p, r, s, etc. ſumma, $\mathfrak{b}$ ſumma factorum ex binis, $\mathfrak{c}$ ſumma factorum ex ternis, $\mathfrak{d}$ ex quaternis et ita porro. Quamobrem valores litterarum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. duplici modo cognoſcuntur, primo ſcilicet ex coefficientibus α, β, γ, δ, etc. ac deinde etiam ex factoribus $(1+px)(1+qx)(1+rx)$ etc. in quos denominator $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. reſoluitur. Quodſi ergo praeter primum factorem $1+px$ quem hic ſolum contemplamur, alii reliqui fuerint incogniti, priori modo, quo litteras $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. determinauimus, vtendum erit.

§. 15. Cum iam per additionem more ſolito abſoluendam denominator ſummae congruens prodeat cum de-

nominatore formulae propoſitae, ſupereſt vt numeratores identicos reddamus. Fiet itaque

$$\begin{array}{l|l}
A = \mathfrak{A} + P & \mathfrak{A} = A - P \\
B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B} + \mathfrak{a}P & \mathfrak{B} = B - Ap + P(p - \mathfrak{a}) \\
C = Bp + \mathfrak{C} + \mathfrak{b}P & \mathfrak{C} = C - Bp + Ap^2 - P(p^2 - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) \\
D = \mathfrak{C}p + \mathfrak{D} + \mathfrak{c}P & \mathfrak{D} = D - Cp + Bp^2 - Ap^3 + P(p^3 - \mathfrak{a}p^2 + \mathfrak{b}p - \mathfrak{c}) \\
E = \mathfrak{D}p + \mathfrak{E} + \mathfrak{d}P & \mathfrak{E} = E - Dp + Cp^2 - Bp^3 + Ap^4 \\
 & \qquad - P(p^4 - \mathfrak{a}p^3 + \mathfrak{b}p^2 - \mathfrak{c}p + \mathfrak{d}) \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Quoniam vero termini numeratoris $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ etc. non in infinitum progrediuntur, ſed ibi terminantur vbi exponens ipſius x eſt vnitate minor, quam maximus exponens in denominatore, in litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. tandem peruenietur ad euaneſcentem, poſtquam ſequentes omnes euaneſcent; ac tum valorem ipſius P definire licebit. Quo igitur valor ipſius P generatim determinetur, ponamus ſucceſſiue numeratorem $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ etc. nullo tum vnico, poſt *duobus*, tribus, quatuor etc. terminis tantum conſtare, eritque ſi

$$\mathfrak{A} = 0;\ P = A$$

$$\mathfrak{B} = 0;\ P = \frac{Ap - B}{p - \mathfrak{a}}$$

$$\mathfrak{C} = 0;\ P = \frac{Ap^2 - Bp + C}{p^2 - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}}$$

$$\mathfrak{D} = 0;\ P = \frac{Ap^3 - Bp^2 + Cp - D}{p^3 - \mathfrak{a}p^2 + \mathfrak{b}p - \mathfrak{c}}$$

etc.

Hinc facile concluditur fore generaliter quotcunque affuerint dimenſiones ipſius x;

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{1 - \frac{1}{p}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^2}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^3}\mathfrak{c} + \frac{1}{p^4}\mathfrak{d} - \text{etc.}}$$

quae

quae expreſſio perpetuo terminatur, ſi formula differentialis propoſita finito terminorum numero conſtet.

§. 16. Numeratorem quidem huius fractionis, quam pro valore ipſius P inuenimus apprime conuenit cum numeratore fractionis praecedenti modo §. 12. pro eadem quantitate P inventae. At denominatores a ſe inuicem diſcrepare videntur: re autem propius perpenſa apparebit ſummum inter vtrosque eſſe conſenſum. Sumamus enim denominatorem priorem: $(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})$ etc. atque patebit actuali multiplicatione eiusmodi prodituram eſſe expreſſionem:

$1-\frac{\mathfrak{P}}{p}+\frac{\mathfrak{Q}}{p^2}-\frac{\mathfrak{R}}{p^3}+\frac{\mathfrak{S}}{p^4}-\frac{\mathfrak{T}}{p^5}+$ etc.

in qua ſit $\mathfrak{P}$ = ſummae quantitatum q, r, s, t etc.

et $\mathfrak{Q}$ = ſummae factorum ex binis

$\mathfrak{R}$ = ſummae factorum ex ternis

$\mathfrak{S}$ = ſummae factorum ex quaternis

etc.

Cum igitur expreſſio $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc aequalis ſit producto $(1+qx)(1+rx)(1+sx)(1+tx)$ etc. (§. 14.) erit ob eandem rationem

$\mathfrak{a}$ = ſummae quantitatum q, r, s, t, etc.

$\mathfrak{b}$ = ſummae factorum ex binis

$\mathfrak{c}$ = ſummae factorum ex ternis

$\mathfrak{d}$ = ſummae factorum ex quaternis

etc.

Conſequenter erit $\mathfrak{P}=\mathfrak{a}$; $\mathfrak{Q}=\mathfrak{b}$; $\mathfrak{R}=\mathfrak{c}$; $\mathfrak{S}=\mathfrak{d}$; etc. ideoque denominator prius inuentus

$(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})$ etc.

transmutabitur in ſequentem,

$1-\frac{1}{p}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^2}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^3}\mathfrak{c}+\frac{1}{p^4}\mathfrak{d}-$ etc.

 qui

qui eſt ipſe denominator modo poſteriori erutus, qui adeo priori eſt aequalis.

§. 17. Denominatorem hunc etiam poterimus exprimere per coefficientes α, β, γ, δ, etc. qui continentur in denominatore formulae differentialis propoſitae, eo quod ſupra §. 14. per hos coefficentes valores literarum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ etc. determinauimus. In hoc autem negotio noſſe oportebit, ex quot omnino terminis conſtet expreſſio $1-\frac{1}{p}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^2}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^3}\mathfrak{c}+$ etc. Ponamus ergo eam conſtare ex

terminis	erit valor ipſius expreſſionis
1	1
2	$2-\frac{1}{p}\alpha$
3	$3-\frac{2}{p}\alpha+\frac{1}{p^2}\beta$
4	$4-\frac{3}{p}\alpha+\frac{2}{p^2}\beta-\frac{1}{p^3}\gamma$
5	$5-\frac{4}{p}\alpha+\frac{3}{p^2}\beta-\frac{2}{p^3}\gamma+\frac{1}{p^4}\delta$
:	
:	
n	$n-\frac{(n-1)\alpha}{p}+\frac{(n-2)\beta}{p^2}-\frac{(n-3)\gamma}{p^3}+\frac{(n-4)\delta}{p^4}-$ etc.

Vbi numerus n indicat quot ſint termini in formula $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+$ etc. ſeu ſi forte qui termini deſint, $n-1$ dat maximum ipſius x exponentem in denominatore formulae differentialis propoſitae. Cum autem $1+px$ ſit factor huius expreſſionis, ea ſi loco x ponatur $-\frac{1}{p}$ euadet $=0$, hoc eſt, erit

$$0=1-\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{p^2}-\frac{\gamma}{p^3}+\frac{\delta}{p^4}-\frac{\varepsilon}{p^5}+\text{ etc.}$$

quae ab illa n vicibus ſubtracta relinquit hanc expreſſionem

$$\frac{\alpha}{p}-\frac{2\beta}{p^2}+\frac{3\gamma}{p^3}-\frac{4\delta}{p^4}+\frac{5\varepsilon}{p^5}-\text{ etc.}$$

quae

quae ergo eſt tertia expreſſio eandem denominatorem pro fractione ipſi P aequali ſuppeditans.

§. 18. Si ergo propoſita fuerit formula differentialis

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\, dx$$

in cuius numeratore x pauciores habeat dimenſiones, quam in denominatore; tum ea in tot formulas differentiales ſimplices logarithmicas reſolui poterit, quot vnitates contineat maximus ipſius x dimenſionum numerus in denominatore. Ad quas inueniendas ponamus denominatorem eſſe productum ex his factoribus

$$(1 + px)(1 + qx)(1 + rx)(1 + sx) \text{ etc.}$$

atque vnusquisque factor vnam ſuppeditabit fractionem ſimplicem; nempe ex factore $1 + px$ orietur formula differentialis $\frac{P\,dx}{1+px}$, eritque

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{(-\frac{q}{p})(1 - \frac{r}{p})(1 - \frac{s}{p})(1 - \frac{t}{p}) \text{ etc.}}$$

vel quod eodem redit

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{\frac{1}{p}\alpha - \frac{2}{p^2}\beta + \frac{3}{p^3}\gamma - \frac{4}{p^4}\delta + \frac{5}{p^5}\varepsilon - \text{etc.}}$$

Simili autem modo, quo hic ex factore $1 + px$ formulam differentialem $\frac{P\,dx}{1+px}$ inuenimus, ex reliquis omnibus factoribus totidem formulae differentiales $\frac{Q\,dx}{1+qx}$, $\frac{R\,dx}{1+rx}$, $\frac{S\,dx}{1+sx}$ etc. reperientur. Quibus omnibus inuentis erit formulae propoſitae differentialis integrale quaeſitum $=$

$$\frac{P}{p}\,l(1+px) + \frac{Q}{q}\,l(1+qx) + \frac{R}{r}\,l(1+rx) + \frac{S}{s}\,l(1+sx) \text{ etc.};$$

 tot

tot conſtans membris logarithmicis, quot x in denominatore formulae propoſitae habet dimenſiones.

§. 19. Fieri autem nequit, vt horum membrorum vllum euaneſcat, ſeu vt vnquam fiat $P = o$, niſi in ipſa formula differentiali propoſita communis diuiſor numeratoris ac denominatoris exiſtat. Quod vt clarius appareat ponamus numeratorem fractionis valorem ipſius P exhibentis $= v$ hoc eſt $A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D +$ etc. $= o$. Haec autem expreſſio reſultat ex numeratore formulae differentialis

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

ponendo $-\frac{1}{p}$ loco x; quare cum haec poſtrema expreſſio fiat $= o$ poſito $-\frac{1}{p}$ loco x, ſequitur $x + \frac{1}{p}$ ſeu $1 + px$ eius diuiſorem eſſe; hocque caſu quo $P = o$ neceſſe eſt, vt numerator et denominator formulae differentialis propoſitae communem habeant diuiſorem. Contra autem facile euenire poteſt, vt valor ipſius P in infinitum excreſcat euaneſcente denominatore

$$(1 - \tfrac{q}{p})\ (1 - \tfrac{r}{p})\ (1 - \tfrac{s}{p})\ (1 - \tfrac{t}{p}) \text{ etc.}$$

quod eueniet ſi inter reliquas litteras q, r, s, t, etc. vna pluresue reperiantur ipſi p aequales. Ponamus eſſe $p = q$, ſeu denominatorem $1 + \alpha x + \beta x^2 +$ etc. duos habere factores aequales, tum in vtraque fractione $\frac{P dx}{1+px}$ et $\frac{Q dx}{1+qx}$ numerator in infinitum excreſcet. Interim tamen integrale ipſum non erit infinitum, ob bina iſta infinita ſe deſtruentia, ſed finitum, atque adeo ad quantitatem algebraicam reducetur quantitas alias perpetuo a logarithmis pendens. Tradamus igitur modum illam integralis partem, quae a duobus factoribus aequalibus oritur defi-

definiendi, cum ea ex praecedentibus formulis infinitis difficulter colligi queat.

§. 20. Si igitur duo pluresue denominatoris factores interſe fuerint aequales, eos a ſe inuicem disiungi non conuenit, ſed integralis membrum, quod ex illis coniunctim naſcitur, peculiari modo eſt inueſtigandum. Sint igitur duo denominatoris factores $(1 + px)^2$ aequales atque ponamus formulam differentialem propoſitam

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}} dx$$

reſolui in has duas partes

$$\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + 2px + ppxx} + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{etc.}}{1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \text{etc.}} dx$$

erit primo vt per additionem denominator propoſitus proveniat

$$\begin{array}{l|l}
\alpha = \mathfrak{a} + 2p & \mathfrak{a} = \alpha - 2p \\
\beta = \mathfrak{b} + 2p\mathfrak{a} + pp & \mathfrak{b} = \beta - 2\alpha p + 3pp \\
\gamma = \mathfrak{c} + 2p\mathfrak{b} + pp\mathfrak{a} & \mathfrak{c} = \gamma - 2\beta p + 3\alpha pp - 4p^3 \\
\delta = \mathfrak{d} + 2p\mathfrak{c} + pp\mathfrak{b} & \mathfrak{d} = \delta - 2\gamma p + 3\beta pp - 4\alpha p^3 + 5p^4
\end{array}$$

Deinde vt numerator propoſitus producatur eſſe oportebit

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A} + \mathfrak{P} \\
B &= \mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}p + \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{a} \\
C &= \mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}p + \mathfrak{A}pp + \mathfrak{Q}\mathfrak{a} + \mathfrak{P}\mathfrak{b} \\
D &= \mathfrak{D} + 2\mathfrak{C}p + \mathfrak{B}pp + \mathfrak{Q}\mathfrak{b} + \mathfrak{P}\mathfrak{c} \\
E &= \mathfrak{E} + 2\mathfrak{D}p + \mathfrak{C}pp + \mathfrak{Q}\mathfrak{c} + \mathfrak{P}\mathfrak{d} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ex his aequationibus viciſſim elicientur valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ſequentes.

$\mathfrak{A} =$

$$\mathfrak{A} = \mathrm{A} - \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B} = \mathrm{B} - 2\mathrm{A}p + \mathfrak{P}(2p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$$
$$\mathfrak{C} = \mathrm{C} - 2\mathrm{B}p + 3\mathrm{A}pp - \mathfrak{P}(3p^2 - 2\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(2p - \mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{D} = \mathrm{D} - 2\mathrm{C}p + 3\mathrm{B}pp - 4\mathrm{A}p^3 + \mathfrak{P}(4p^3 - 3\mathfrak{a}p^2 + 2\mathfrak{b}p - \mathfrak{c}) - \mathfrak{Q}(3pp - 2\mathfrak{a}p + \mathfrak{b})$$

etc.

Hae aequationes eousque ſunt continuandae, donec in expreſſione $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ etc. quae finito conſtat terminorum numero, ad finem perueniatur; tum enim ob ſequentes valores in ſerie litterarum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc. euaneſcentes ſtatim occurrent duae aequationes ex quibus coefficientes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt.

§. 21. Si ordine progrediamur, ac primo $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, deinde $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, tum $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ etc. euaneſcentes ponamus, tum pro caſibus particularibus valores litterarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ inuenimus, ex earum autem formis difficulter generales expreſſiones colligentur. Interim tamen alio modo ſatis concinne valores ipſarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt: Ponatur

$$\frac{\mathrm{A} - \frac{1}{p}\mathrm{B} + \frac{1}{p^2}\mathrm{C} - \frac{1}{p^3}\mathrm{D} + \text{etc.}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^3}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^4}\mathfrak{c} + \text{etc.}} = \mathrm{V}$$

erit V functio ipſius p et quantitatum cognitarum A, B, C, etc. et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. Quodſi ergo quantitas haec V differentietur ponendo tantum p variabili fiet $\frac{d\mathrm{V}}{dp}$ quantitas algebraica eaque cognita. Iam dico valores ipſarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ita definiri vt ſit

$$\mathfrak{P} = \frac{d\mathrm{V}}{dp} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{pp}{dp}\, d.\frac{\mathrm{V}}{p} = \frac{p\,d\mathrm{V}}{dp} - \mathrm{V}$$

Ad quas expreſſiones demonſtrandas, notari debet cum in ſerie litterarum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. ad euaneſcentes litteras

teras fuerit peruentum, tum binas eiusmodi prodituras eſſe aequationes.

$$nAp^{n-1}-(n-1)Bp^{n-2}+(n-2)Cp^{n-3}-(n-3)Dp^{n-4}+\text{ etc.}$$
$$=\mathfrak{P}(np^{n-1}-(n-1)\mathfrak{a}p^{n-2}+(n-2)\mathfrak{b}p^{n-3}-(n-3)\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{ etc.})$$
$$-\mathfrak{Q}((n-1)p^{n-2}-(n-2)p^{n-3}+(n-3)\mathfrak{b}p^{n-4}-(n-4)\mathfrak{c}p^{n-5}+\text{ etc.})$$

et

$$(n+1)Ap^{n}-nBp^{n-1}+(n-1)Cp^{n-2}-(n-2)Dp^{n-3}+\text{ etc.}$$
$$=\mathfrak{P}((n+1)p^{n}-n\mathfrak{a}p^{n-1}+(n-1)\mathfrak{b}p^{n-2}-(n-2)\mathfrak{c}p^{n-3}+\text{ etc.})$$
$$-\mathfrak{Q}(np^{n-1}-(n-1)\mathfrak{a}p^{n-2}+(n-2)\mathfrak{b}p^{n-3}-(n-3)\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{ etc.})$$

Ponatur iam:

$$Ap^{n}-Bp^{n-1}+Cp^{n-2}-Dp^{n-3}+\text{ etc.}=M$$
$$p^{n-1}-\mathfrak{a}p^{n-2}+\mathfrak{b}p^{n-3}-\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{ etc.}=N$$

atque binae illae aequationes tranſibunt in has

$$\frac{dM}{dp}=\frac{\mathfrak{P}d.Np}{dp}-\frac{\mathfrak{Q}d.N}{dp}$$
$$\frac{d.Mp}{dp}=\frac{\mathfrak{P}d.Np^{2}}{dp}-\frac{\mathfrak{Q}d.Np}{dp}$$

ex quibus elicitur:

$$\mathfrak{Q}=\frac{\mathfrak{P}Ndp+\mathfrak{P}pdN-dM}{dN}\text{ et}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{2\mathfrak{P}Npdp+\mathfrak{P}p^{2}dN-Mdp-pdM}{Ndp+pdN}$$

Atque ex harum comparatione oritur

$$\mathfrak{P}=\frac{NdM-MdN}{N^{2}dp}=\frac{1}{dp}d.\frac{M}{N}$$
$$\mathfrak{Q}=-\frac{M}{N}+\frac{p(NdM-MdN)}{N^{2}dp}=-\frac{M}{N}+\frac{p}{dp}d.\frac{M}{N}$$

Ponatur iam $\frac{M}{N}=V$ vt ſit

$$V=\frac{Ap^{n}-Bp^{n-1}+Cp^{n-2}-Dp^{n-3}+\text{ etc.}}{p^{n-1}-\mathfrak{a}p^{n-2}+\mathfrak{b}p^{n-3}-\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{ etc.}}$$

quae ſi numerator et denominator per p^{n} diuidatur, prorſus vt ante aſſumſimus

$$V = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^3}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^4}\mathfrak{c} + \text{etc.}}$$

Hocque adeo valore ipſius V aſſumto habebimus:

$$\mathfrak{P} = \frac{dV}{dp} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{p\,dV}{dp} - V \text{ ſeu } \mathfrak{P} = \frac{p}{dp} \cdot \frac{dV}{p}\ \mathfrak{Q} = \frac{pp}{dp}\,d.\frac{V}{p}.$$

§. 22. Simili modo ſi formulae propoſitae

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\,dx$$

denominator habeat tres factores ſimplices aequales, ita vt ſit diuiſibilis per $(1 + px)^3$, tum reſolutio in duas iſtiusmodi partes fieri debet

$$\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}x\,dx + \mathfrak{R}x^2dx}{1 + 3px + 3p^2x^2 + p^3x^3} + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \text{etc.}}{1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \text{etc.}}\,dx$$

vt iam ſummae denominator cum propoſito congruat, oportebit eſſe

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \alpha - 3p \\
\mathfrak{b} &= \beta - 3\alpha p + 6pp \\
\mathfrak{c} &= \gamma - 3\beta p + 6\alpha pp - 10p^3 \\
\mathfrak{d} &= \delta - 3\gamma p + 6\beta pp - 10\alpha p^3 + 15p^4 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Numeratorum autem identitas dabit has aequationes:

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A} + \mathfrak{P} \\
B &= \mathfrak{B} + 3\mathfrak{A}p + \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{a} \\
C &= \mathfrak{C} + 3\mathfrak{B}p + 3\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{R} + \mathfrak{Q}\mathfrak{a} + \mathfrak{P}\mathfrak{b} \\
D &= \mathfrak{D} + 3\mathfrak{C}p + 3\mathfrak{B}p^2 + \mathfrak{A}p^3 + \mathfrak{R}\mathfrak{a} + \mathfrak{Q}\mathfrak{b} + \mathfrak{P}\mathfrak{c} \\
E &= \mathfrak{E} + 3\mathfrak{D}p + 3\mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{B}p^3 + \mathfrak{R}\mathfrak{b} + \mathfrak{Q}\mathfrak{c} + \mathfrak{P}\mathfrak{d} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hinc-

Hincque viciſſim ſequentes valores pro litteris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. eliciuntur.

$$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B} = B - 3Ap + \mathfrak{P}(3p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$$
$$\mathfrak{C} = C - 3Bp + 6Ap^2 - \mathfrak{P}(6pp - 3\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(3p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{D} = D - 3Cp + 6Bp^2 - 10Ap^3 + \mathfrak{P}(10p^3 - 6\mathfrak{a}p^2 + 3\mathfrak{b}p - \mathfrak{c})$$
$$- \mathfrak{Q}(6pp - 3\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{R}(3p - \mathfrak{a})$$
etc.

Ponatur iam vt ante fecimus:

$$Ap^n - Bp^{n-1} + Cp^{n-2} - Dp^{n-3} + \text{etc.} = M$$
et
$$p^{n-2} - \mathfrak{a}p^{n-3} + \mathfrak{b}p^{n-4} - \mathfrak{c}p^{n-5} + \text{etc.} = N$$

erit vbi ad valores euaneſcentes peruenitur

$$ddM - \mathfrak{P}dd.Np^2 + \mathfrak{Q}dd.Np - \mathfrak{R}ddN = 0$$
$$dd.Mp - \mathfrak{P}dd.Np^3 + \mathfrak{Q}dd.Np^2 - \mathfrak{R}dd.Np = 0$$
$$dd.Mp^2 - \mathfrak{P}dd.Np^4 + \mathfrak{Q}dd.Np^3 - \mathfrak{R}dd.Np^2 = 0$$

poſito in duplici differentiatione dp conſtante. Quod ſi iam ponatur $\frac{M}{N} = V$ ita vt ſit

$$V = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{pp} - \frac{\mathfrak{a}}{p^3} + \frac{\mathfrak{b}}{p^4} - \frac{\mathfrak{c}}{p^5} + \text{etc.}}$$

reperientur ſequentes valores pro $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$.

$$\mathfrak{P} = \frac{ddV}{2dp^2} = \frac{p}{2dp^2} \cdot \frac{ddV}{p}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{pddV}{dp^2} - \frac{dV}{dp} = \frac{pp}{dp^2} \cdot d \cdot \frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{R} = \frac{ppddV}{2dp^2} - \frac{pdV}{dp} + V = \frac{p^3}{2dp^2} \cdot dd \cdot \frac{V}{p}.$$

§. 23. Haec iam ſufficiunt ad legem cognoſcendam cuius beneficio reſolutio formulae propoſitae in duas partes

 abſolui

abſolui debeat, ſi denominator quotcunque habeat factores ſimplices aequales. Quae lex vt facilius perſpiciatur repetamus breuitur, quae hactenus ſunt tradita. Sitque propoſita haec formula

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\, dx$$

cuius integrale requiritur in cuius numeratore x pauciores habeat dimenſiones quam in denominatore; ſitque denominatoris factor aliquis $1 + px$. Quod ſi iam hic factor $1 + px$ alium non habeat ſui aequalem, ex ipſo integralis quaeſiti pars reperietur $\int \frac{\mathfrak{P}\, dx}{1+px}$, in quo coefficiens $\mathfrak{P}$ ita determinabitur. Diuidatur primo denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}$ per $1 + px$ ſitque quotus $= 1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \text{etc.}$ Tum ponatur

$$\frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{p}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^2}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^3}\mathfrak{c} + \text{etc.}} = V$$

eritque $\mathfrak{P} = p \cdot \frac{V}{p}$, atque integrale ex factore $1 + px$ ortum erit

$$p \cdot \frac{V}{p} \int \frac{dx}{1+px} = \frac{V}{p}\, l(1+px)$$

hocque modo ex ſingulis denominatoris factoribus ſimplicibus reſpondentes integralis partes eruantur, quae ſimul ſumtae totum integrale quaeſitum praebebunt.

§. 24. Quod ſi autem denominator duos factores ſimplices habeat aequales, ſeu $(1 + px)^2$ factor fuerit denominatoris, tum ex hoc factore quadrato integralis pars inueniri debet, quae erit huiusmodi $\int \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}x\,dx}{(1+px)^2}$; in qua coefficientes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ hoc modo reperientur. Diuidatur

deno-

denominator $1+\alpha x+\beta x^2+$ etc. per $(1+px)^2$ ſitque quotus $= 1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+$ etc. Tum ponatur

$$\frac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{p^2}C-\frac{1}{p^3}D+\text{ etc.}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^3}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^4}\mathfrak{c}+\text{ etc.}}=V$$

erit V functio ipſius p quae differentietur more conſueto ponendo tantum p variabile, fietque

$$\mathfrak{P}=\frac{p}{1dp}\cdot\frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{pp}{1dp}\cdot d\cdot\frac{V}{p}$$

Atque integrale ex factore $(1+px)^2$ oriundum erit

$$\frac{p}{1dp}\,d\frac{V}{p}\int\frac{dx}{1+px}+p\cdot\frac{V}{pp}\int\frac{dx}{(1+px)^2}$$

ſeu $\frac{1}{1dp}\,d\cdot\frac{V}{p}\,l(1+px)-\frac{V}{pp}\cdot\frac{1}{1+px}$.

§. 25. Habeat denominator tres factores ſimplices aequales, ſeu ſit $(1+px)^3$ eius diuiſor; tum ex hoc toto factore quaeratur integralis pars, quae ſit

$$\int\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx+\mathfrak{R}x^2dx}{(1+px)^3}.$$

Coefficientes autem $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, et $\mathfrak{R}$ hoc modo definientur. Diuidatur denominator $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. per $(1+px)^3$ ſitque quotus $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+$ etc.

Tum ponatur $\dfrac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{pp}C-\frac{1}{p^3}D+\text{ etc.}}{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^4}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^5}\mathfrak{c}+\text{ etc.}}=V$

ex hoc ipſius V valore cognito erit

$$\mathfrak{P}=\frac{p}{1.2dp^2}\cdot\frac{ddV}{p}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{2p^2}{1.2dp^2}\cdot d\cdot\frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{R}=\frac{p^3}{1.2dp^2}\cdot dd\cdot\frac{V}{p}$$

Atque integralis quaeſiti membrum ex factore hoc $(1+px)^3$ oriundum erit:

$$\frac{p}{1\cdot 2 dp^2} dd.\frac{V}{p}\int\frac{dx}{1+px}+\frac{p}{1dp}.d.\frac{V}{p^2}\int\frac{dx}{(1+px)^2}+p.\frac{V}{p^3}\int\frac{dx}{(1+px)^3}$$

ſeu

$$\frac{dd.\frac{V}{p}}{1\cdot 2 dp^2} l(1+px)-\frac{d.\frac{V}{p^2}}{1dp}\cdot\frac{1}{1+px}-\frac{V}{p^3}\cdot\frac{1}{2(1+px)^2}$$

§. 26. Habeat denominator formulae differentialis propoſitae quatuor factores ſimplices inter ſe aequales, ita vt $(1+px)^4$ ſit eius diuiſor, tum ex toto hoc factore quaeratur integralis pars

$$\int\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx+\mathfrak{R}x^2dx+\mathfrak{S}x^3dx}{(1+px)^4}$$

vbi coefficientes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{S}$ hoc modo determinabuntur. Diuidatur denominator propoſitus $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. per $(1+px)^4$ ſitque quotus $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+$ etc. Tum ponatur

$$\frac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{p^2}C-\frac{1}{p^3}D+\text{ etc.}}{\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^5}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^6}\mathfrak{c}+\text{ etc.}}=V$$

Atque ex hoc ipſius V valore cognito erit

$$\mathfrak{P}=\frac{p}{1\cdot 2\cdot 3dp^3}\cdot\frac{d^3V}{p}$$

$$\mathfrak{Q}=\frac{3p^2}{1\cdot 2\cdot 3dp^3}d.\frac{ddV}{p}$$

$$\mathfrak{R}=\frac{3p^3}{1\cdot 2\cdot 3dp^3}dd.\frac{dV}{p}$$

$$\mathfrak{S}=\frac{p^4}{1\cdot 2\cdot 3dp^3}d^3.\frac{V}{p}$$

Hinc integralis membrum ex factore $(1+px)^4$ oriundum erit:

$$\frac{p}{1\cdot 2\cdot 3dp^3}d^3.\frac{V}{p}\int\frac{dx}{1+px}+\frac{p}{1\cdot 2dp^2}d^2.\frac{V}{pp}\int\frac{dx}{(1+px)^2}$$

$$+\frac{p}{1dp}d.\frac{V}{p^3}.\int\frac{dx}{(1+px)^3}+p.\frac{V}{p^4}\int\frac{dx}{(1+px)^4}.$$

§. 27.

§. 27. Perſpicitur hinc duplex lex, altera quam valores coefficientium aſſumtorum 𝔓, 𝔔, 𝔑, etc. inter ſe tenent, altera vero, quam formulae integrales ipſae obſeruant; atque ex vtraque integralis quaeſiti membrum id poterit definiri quod oritur ex poteſtate quacunque factoris cuiuspiam ſimplicis $1+px$. Sufficit autem alteram tantum legem notaſſe, cum altera ex altera ſequatur; ac poſterior quidem non ſolum facilior videtur, verum etiam maiorem praeſtat vtilitatem, cum ex ea ſtatim integrale formari queat. Probe autem cauendum eſt ne vera variabilis x cum variabili aſſumtitia p confundatur; nam in formula differentiali propoſita vnica ineſt variabilis x, praeter quam omnes reliquae quantitates non excepta p ſunt conſtantes et in integratione qua tales tractantur: quando vero coefficientes per ſe quidem conſtantes inueſtigantur, tum vera variabilis x non amplius in computum ducitur; ſed inueſtigatio per meras conſtantes abſoluitur. In hoc autem opere ingens nanciſcimur ſubſidium ad coefficientes determinandos ope differentiationis, vbi quantitatem V tanquam functionem variabilis p conſideramus, eamque differentiamus ſemel, bis pluriesue ponendo dp conſtans. Eſt adeo haec differentiatio tantum operatio ſubſidiaria, quae ad coefficientes indagandos ſuſcipitur; qui, quam primum fuerint inuenti, tum rurſus quantitas p tanquam conſtans tractatur; et integrale more conſueto expreſſum exhibetur.

§. 28. Vnicam difficultatem, quae ſaepenumero maximam moleſtiam parere poſſet, hic adhuc remouere poſſumus, quo ipſo calculus mirum in modum contrahetur. Haec

Haec autem difficultas verſatur in inuentione ſeriei $1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 +$ etc. quae reſultat ſi denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. vel per $1 + px$ vel per $(1 + px)^2$ vel per $(1 + px)^3$ vel etc. diuidatur. Facilior igitur calculus reddetur ſi pro quouis caſu in valore ipſius V loco litterarum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, etc. earum valores per α, β, γ, etc. ſubſtituamus, qui cum ſint ſponte cogniti inuentione litterarum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. ſuperſedere poterimus. Caſu igitur primo §. 23. pertractato, quo denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. ſemel tantum diuiſorem $1 + px$ admittit, erit:

$$V = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{\frac{\alpha}{p} - \frac{2\beta}{p^2} - \frac{3\gamma}{p^3} + \frac{4\delta}{p^4} - \text{etc.}}, \quad (§. 18.)$$

quae operatio, vt adhuc breuius abſolui queat, ponatur in formula differentiali propoſita

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\, dx$$

numerator $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. $= P$

et denomin: $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. $= Q$

erit $V = \frac{Ppdx}{dQ}$ poſito $-\frac{1}{p}$ loco x; quo facto obtinebit V eum ipſum valorem per p expreſſum, qui ipſi conuenit pro caſu, quo $1 + px$ eſt factor denominatoris Q; ex hocque factore integralis quaeſiti pars oritur haec

$$\frac{V}{p}\int\frac{pdx}{1+px}$$

§. 29. Si denominator Q factorem habeat $(1 + px)^2$ tum ſumatur $V = \frac{1 \cdot 2 Pp^3 dx^2}{ddQ}$ ponendo in differentiatione ipſius Qx variabile et dx conſtans, tumque loco x ſcribendo $-\frac{1}{p}$, quo facto V fiet functio ipſius p, quae proin

poſita

poſita hac p variabili differentiari poterit. Erit autem integralis quaeſiti membrum ex factore $(1+px)^2$ oriundum:

$$\frac{d\cdot\frac{V}{p}}{1\,dp}\int\frac{p\,dx}{1+px}+\frac{V}{p^2}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^2}$$

Sin denominator Q factorem habeat $(1+px)^3$ tum ſumatur $V=\frac{1\cdot2\cdot3\,Pp^5dx^3}{d^3Q}$; vbi primo in differentiatione ipſius $Q=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. ponatur x variabile et in ſequentibus differentiationibus dx conſtans; tum fiat $x=-\frac{1}{p}$, vt prodeat V functio ipſius p deinceps differentianda poſito p variabili. Atque integralis quaeſiti pars ex factore $(1+px)^3$ oriunda erit

$$\frac{dd\cdot\frac{V}{p}}{1\cdot2\,dp^2}\int\frac{p\,dx}{1+px}+\frac{d\cdot\frac{V}{p^2}}{1\,dp}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^2}+\frac{V}{p^3}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^3}$$

Si denominator Q factorem habeat $(1+px)^4$ tum ſumatur $V=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\,Pp^7dx^4}{d^4Q}$ et ſeruatis iisdem circa differentiationes legibus erit integralis portio ex denominatoris factore $(1+px)^4$ oriunda $=$

$$\frac{d^3\cdot\frac{V}{p}}{1\cdot2\cdot3\,dp^3}\int\frac{p\,dx}{1+px}+\frac{d^2\cdot\frac{V}{pp}}{1\cdot2\,dp^2}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^2}+\frac{d\cdot\frac{V}{p^3}}{1\,dp}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^3}+\frac{V}{p^4}\int\frac{p\,dx}{(1+px)^4}$$

ſicque vlterius, quousque libuerit, progredi licebit.

§. 30. Generatim igitur, quae hactenus ſunt tradita huc redeunt. Si propoſita ſit formula differentialis rationalis

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{etc.}}\,dx$$

in qua variabilis x pauciores habeat dimenſiones in numeratore quam in denominatore huiusque integrale quaeratur: dico integrale ex tot compoſitum fore partibus, quot denominator contineat factores ſimplices a ſe inuicem diverſos. Atque ex quolibet factore denominatoris ſimplici eiusque potentia quacunque pars integralis quaeſiti ſequenti modo inueſtigatur. Sit

$(1+px)^n$ factor ſeu diuiſor denominatoris

Atque ponatur breuitatis gratia:

numerator $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. $= P$

denominat. $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. $= Q$

Tum continuo differentiando denominatorem Q, poſito x variabili et dx conſtanti, capiatur

$$V = \frac{P p^{2n-1} dx^n}{d^n Q} \text{ vel quodidem eſt } V = \frac{P p^{n-1} (1+px)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot Q}$$

ac fiat poſtea $x = -\frac{1}{p}$, vt exeat ex hac expreſſione x, maneatque V *functio ipſius p et conſtantium*; quae deinceps differentietur ponendo p variabile et dp conſtans. Quo facto ex factore $(1+px)^n$ naſcetur integralis quaeſiti iſta pars:

$$\frac{n\, d^{n-1} \frac{V}{p}}{dp^{n-1}} \int \frac{p\,dx}{1+px} + \frac{n(n-1)\, d^{n-2} \frac{V}{p^2}}{dp^{n-2}} \int \frac{p\,dx}{(1+px)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\, d^{n-3} \frac{V}{p^3}}{dp^{n-3}} \int \frac{p\,dx}{(1+px)^3}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\, d^{n-4} \frac{V}{p^4}}{dp^{n-4}} \int \frac{p\,dx}{(1+px)^4} + \text{etc.}$$

quae tot conſtabit membris, quot n continet vnitates.

§. 31. Habemus hic valorem ipſius V duplici modo expreſſum, quorum eo, qui commodior viſus fuerit, vti conueniet. Si quidem denominator Q iam fuerit in ſuos

factores

factores reſolutus, tum expediet vti modo poſteriori quo eſt

$$V = \frac{Pp^{n-1}(1+px)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots nQ}$$

tum enim ſtatim fiet $\frac{Q}{(1+px)^n}$ quantitas integra, eo, quod denominatorem Q diuiſibilem eſſe ponimus per $(1+px)^n$. Quod autem diximus inuento hoc modo valore ipſius V loco x poni debere $-\frac{1}{p}$; hic probe cauendum eſt, ne loco p numerum determinatum ſcribendo contra inſtitutum peccemus, ac talem pro V expreſſionem obtineamus, quae differentiari nequeat. Quamobrem etſi reuera p eam quantitatem determinatam denotat, quae reddat $(1+px)^n$ diviſorem denominatoris Q, tamen loco $-\frac{1}{x}$ non illa quantitas determinata, ſed potius character p, quaſi adhuc eſſet incognitus, indeterminate ſubſtitui debet, quem etiam tamdiu retinebit donec per differentiationem ſinguli integralis coefficientes fuerint reperti. Quod vt clarius ob oculos ponatur, ſit integranda iſta formula differentialis Exemplum

$$\frac{x\,dx}{(1+x)^2(1+x)^2(1+2x)}$$

Erit ergo $P = x$ et $Q = (1-x)^2(1+x)^2(1+2x)$ atque integrale ex tribus conſtabit partibus, quae ex tribus factoribus $(1-x)^2$, $(1+x)^2$ et $1+2x$ reperientur. Sumatur primum factor $(1-x)^2$, ex quo eſt $p = -1$ quem autem valorem tum demum loco p ſubſtituemus, cum omnes coefficientes fuerint determinati.

Erit ergo $n = 3$ et $\frac{Q}{(1+px)^3} = (1+x)^2(1+2x)$, ex quo fit $V = \frac{p^2x}{6(1+x)^2(1+2x)} = \frac{-p^4}{6(p-1)^2(p-2)}$. Hinc erit $\frac{V}{p^3} = \frac{-p}{6(p-1)^2(p-2)}$ et $\frac{6V}{p^3} = \frac{-p}{p^3-4pp+5p-2}$; $\frac{6d\cdot\frac{V}{pp}}{dp} = \frac{p^3+pp-4p}{(p-1)^3(p-2)^2}$ itemque $\frac{3V}{p} = \frac{-p^3}{2(p-1)^2(p-2)}$ vnde erit $\frac{3}{dp}d\cdot\frac{V}{p} = \frac{2p^3-3pp}{(p-1)^3(p-2)^2}$; atque $\frac{3}{dp^2}d^2\cdot\frac{V}{p} = \frac{-4p^4+7p^3+6pp-12p}{(p-1)^4(p-2)^3}$. Cum nunc ſit $p = -1$ erit

$$\frac{3}{dp^2}\,d^2\cdot\frac{V}{p} = \frac{7}{16\cdot 27}$$
$$\frac{6}{dp}\,d\cdot\frac{V}{p^2} = \frac{-4}{8\cdot 9}$$
$$6\,\frac{V}{p^3} = \frac{-1}{4\cdot 3}$$

atque integrale ex factore $(1-x)^3$ oriundum erit

$$\frac{7}{16\cdot 27}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{4}{8\cdot 9}\int\frac{dx}{(1-x)^2} + \frac{1}{4\cdot 3}\int\frac{dx}{(1-x)^3} =$$
$$\frac{7}{16\cdot 27}\,l\,\frac{1}{1-x} + \frac{4}{8\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{8\cdot 3(1-x)^2}.$$

Porro ſumatur factor $(1+x)^2$ erit $n = 2$, et $p = 1$ atque $V = \frac{px}{2(1-x)^3(1+2x)} = \frac{-p^4}{2(p+1)^3(p-2)}$. Hinc eſt $2\cdot\frac{V}{pp} = \frac{-pp}{(p+1)^3(p-2)} = \frac{1}{8}$ poſito $p = 1$: ac $\frac{2}{dp}d\cdot\frac{V}{p} = \frac{p^4-2p^3+6pp}{(p+1)^4(p-2)^2} = \frac{5}{16}$ poſito $p = 1$. Ergo ex denominatoris factore $(1+x)^2$ naſcitur integralis pars haec.

$$\frac{5}{16}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{5}{16}\,l(1+x) - \frac{1}{8(1+x)}$$

Denique ex factore $1+2x$, fit $n = 1$ et $p = 2$ oriturque $V = \frac{x}{(1-x)^3(1+x)^2} = \frac{-p^4}{(p+1)^3(p-1)^2}$ et quia nulla differentiatione opus eſt ponatur $p = 2$ fiet $\frac{V}{p} = \frac{-8}{27}$ et integralis pars ex factore $1+2x$ oriunda erit $= \frac{-8}{27}\int\frac{2dx}{1+2x} = \frac{-8}{27}\,l(1+2x)$

Ex

Ex his itaque formulae differentialis huius

$$\frac{x\,dx}{(1-x)^3(1+x)^2(1+2x)}$$

integrale completum colligitur eſſe:

$$\frac{7}{16\cdot 27}\,l\frac{1}{1-x} + \frac{5}{16}\,l(1+x) + \frac{8}{27}\,l\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{18(1-x)} + \frac{1}{24(1-x)^2} - \frac{1}{8(1+x)} + \text{Conſt.}$$

§. 32. Ex his igitur dilucide perſpicitur, quibus operationibus cuiuscunque formulae differentialis, dummodo ſit rationalis, integrale inueniri oporteat. Primum enim ſi denominator formulae propoſitae fuerit diuiſibilis per x, vel eius poteſtatem quamcunque, tum docuimus formulam in duas partes diſcerpere, quarum altera integrationem ſponte admittat, habens pro denominatore illam ipſam poteſtatem ipſius x, altera pars autem habeat denominatorem non amplius diuiſibilem per x; quae adeo reducetur ad hanc formam:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}}\,dx$$

in cuius integrale inquiri oporteat. Secundo videndum eſt vtrum in hac forma variabilis x in numeratore tot vel plures habeat dimenſiones quam in denominatore, an pauciores. Nam ſi tot habeat vel plures dimenſiones, tum iterum formula differentialis in duas partes diſcerpi poterit, quarum altera ſit nullo negotio integrabilis, altera autem habitura ſit in numeratore pauciores dimenſiones ipſius x, quam in denominatore; quae ideo erit iſtius modi:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}$$

in qua fractione variabilis x in denominatore plures habeat dimenſiones quam in numeratore. Tertio ergo tota integrandi difficultas reducitur ad integrationem iſtiusmodi formularum; ad quam abſoluendam oportet denominatorem

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}$$

in ſuos factores ſimplices ſingulos huius formae $1 + px$ reſoluere, quorum vnusquisque modo expoſito tractatus dabit vnam integralis quaeſiti partem, ita vt ſingulis his partibus, quae ex ſingulis denominatoris factoribus oriuntur, colligendis obtineatur integrale quaeſitum. In hoc autem negotio moleſtiam faceſſit, ſi duo pluresue iſtorum factorum ſimplicium fuerint inter ſe aequales, huic vero incommodo remedium attulimus, dum docuimus, quomodo ex factoribus aequalibus coniunctis integralis pars ex ipſis oriunda inueniri debeat. Vnicum autem incommodum adhuc ſaepenumero accedit, quod in hoc conſiſtit, vt quoties denominator habeat factores imaginarios, toties integralis partes ex iis oriundae fiant quoque imaginariae: quae etſi coniunctim ſumtae quantitatem realem praebent, tamen ea ex imaginariis non tam liquido appareat. Quamobrem operam dabimus, vt integrale ab imaginariis omnino liberam ac ſolis quantitatibus realibus expreſſum exhibeamus.

§. 33. Dubium enim eſt nullum, quin formulae differentialis realis integrale pariter ſit reale; namque integrale nil aliud eſt niſi ſumma omnium valorum differentialium formulae propoſitae a minimo ipſius x valore ad maximum continuo progredientium, qui cum ſint omnes reales, neceſſe eſt, vt etiam eorum ſumma, hoc eſt integrale ſit, quantitas realis. Quocirca

etiam

etiam ſi denominator formulae differentialis habeat factores imaginarios, qui proinde integralis partes producant imaginarias, tamen totum integrale ſpeciem tantum imaginarii prae ſe feret, atque re ipſa erit quantitas realis. Ita vidimus integrale huius formulae $\frac{dx}{1+xx}$, ſi denominator $1+xx$ in ſuos factores ſimplices imaginarios $1+x\sqrt{-1}$ et $1-x\sqrt{-1}$ reſoluatur, integrale componi ex duobus logarithmis imaginariis $\frac{1}{2\sqrt{-1}}l(1+x\sqrt{-1})-\frac{1}{2\sqrt{-1}}l(1-x\sqrt{-1})$ qui autem ſimul ſumti reducuntur ad quadraturam circuli, ita vt integrale ſit arcus circuli, cuius tangens eſt $=x$ poſito radio $=1$. Cum igitur quilibet factor ſimplex imaginarius in integrale inferat logarithmum imaginarium, iure concludimus cunctos hos logarithmos imaginarios ſimul ſumtos ad quadraturam circuli aliusue curuae redire, quae eorum loco ſubſtituta integrali formam realem inducat. Demonſtrabimus autem omnes logarithmos imaginarios, cuiuscunque demum ſint formae, dummodo quantitatem realem referant, ad quadraturam circuli reuocari poſſe, ita vt nullam aliam quadraturam introducere ſit opus. Hincque patebit omnis formulae differentialis rationalis, vtcunque fuerit compoſita, integrale per logarithmos et quadraturam circuli perpetuo exhiberi poſſe, neque ad hoc vllam aliam quadraturam requiri.

§. 34. Dico autem quotcunque denominator formulae differentialis propoſitae habeat factores ſimplices imaginarios, tum eorum numerum ſemper eſſe parem, binosque ex iis ſemper ita eſſe comparatos, vt eorum productum fiat reale. Quod ad numerum parem factorum imaginariorum attinet, id quidem iam pridem conſtat, atque firmiſſimis

tiſſimis argumentis eſt confirmatum. Factores enim ſimplices expreſſionis algebraicae formantur ex radicibus eiusdem expreſſionis nihilo aequalis poſitae, ſic ſi aequationis huius

$$z^n + \alpha z^{n-1} + \beta z^{n-2} + \gamma z^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

radices fuerint: $z = p$; $z = q$; $z = r$; etc. tum huius expreſſionis algebraicae:

$$z^n + \alpha z^{n-1} + \beta z^{n-2} + \gamma z^{n-3} + \text{etc.}$$

factores ſimplices erunt: $z-p$; $z-q$; $z-r$; etc. itaque inuentio factorum ſimplicium abſoluitur inuentione radicum aequationis algebraicae: atque radices reales praebebunt factores ſimplices reales imaginariae vero imaginarios. Demonſtratum autem eſt, ſi maximus ipſius z exponens n ſit numerus impar, tum aequationem vel vnam habere radicem realem, vel tres, vel quinque, vel ſeptem, etc. ex quo numerus radicum non realium ſeu imaginariarum erit par, eo quod numerus radicum omnium aequetur numero n qui eſt impar. Deinde etiam demonſtratum eſt ſi maximus incognitae z exponens n fuerit numerus par, tum aequationem vel nullam habere radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel ſex, etc. vnde etiam hoc caſu numerus radicum imaginariarum erit par. Ex quibus colligitur, ſi quaecunque expreſſio algebraica habuerit factores ſimplices imaginarios, tum eorum numerum perpetuo eſſe parem, ideoque factores imaginarios habebit vel nullum, vel duos, vel quatuor, vel ſex, etc. ſecundum numeros pares.

§. 13. Si iam haec ad denominatorem formulae noſtrae differentialis propoſitae accommodemus, is vel nullum habebit factorem ſimplicem imaginarium, quo caſu

vtique

vtique integrale per methodum traditam in forma reali reperitur; vel habebit duos factores ſimplices imaginarios, vel quatuor, vel ſex, vel octo etc. Ponamus denominatorem duos tantum habere factores ſimplices imaginarios, reliquos vero omnes reales: ac diuidamus eum per productum ex omnibus factoribus realibus, quod vtique erit quantitas realis; manifeſtum eſt quotum fore quantitatem realem. At quotus erit productum ex binis illis factoribus imaginariis; ideoque horum productum erit quantitas realis. Hinc ſi denominator $1 + \alpha x + \beta x^2$ $\gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. duos tantum habeat factores imaginarios, eorum productum erit huiusmodi $1 + px + qx^2$, in quo coefficientes p et q ſint reales; ideoque iſte denominator loco duorum factorum ſimplicium imaginariorum habebit vnum factorem trinomialem $1 + px + qx^2$ realem, cuius factores cum ſint imaginarii erit $q > \frac{pp}{4}$. Cum igitur ſit $\frac{pp}{4}$ quantitas poſitiua, erit q etiam quantitas poſitiua atque maior quam quadratum ſemiſſis ipſius p. Quodſi iam in producto omnium factorum ſimplicium realium ponamus in coefficientibus eiusmodi mutationem fieri, vt vnus factor fiat imaginarius, ſimul alium imaginarium fieri oportebit, horumque duorum productum per idem ratiocinium fiet reale. Vnde colligitur loco omnium factorum ſimplicium imaginariorum, quorum numerus ſit $= 2m$, factores trinomiales huius formae $1 + px + qxx$ reales, quorum numerus ſit $= m$ ſubſtitui poſſe.

§ 36. Si igitur formulae differentialis propoſitae

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}} dx$$

denominator habeat quotcunque factores ſimplices imaginarios, eorum loco poterimus adhibere factores trinomiales $1 + px + qxx$ reales; hocque modo reſoluemus denominatorem in factores meros reales. Scilicet tot ſimplices quot habebit reales, ac pro imaginariis factores trinomiales reales introducemus. Quare cum iam oſtenderimus, quomodo ex ſingulis factoribus ſimplicibus partes integralis reſpondentes inueniri oporteat; ſupereſt vt modum tradamus inueniendi integralis partes ex factoribus trinomialibus oriundas. Sit igitur factor denominatoris trinomialis $1 + px + qxx$, atque formula differentialis propoſita in has duas partes diſcerpi concipiatur:

$$\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx} + \frac{\mathfrak{A}dx + \mathfrak{B}xdx + \mathfrak{C}x^2dx + \text{ect.}}{1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \text{etc.}}$$

Atque ex parte $\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx}$ naſcetur integrale

$$\frac{\mathfrak{Q}}{2q} l(1 + px + qxx) + \frac{2\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p}{q\sqrt{(4q - pp)}} \text{A tang.} \frac{x\sqrt{(4q - pp)}}{2 + px}$$

erit enim ob duos factores ſimplices imaginarios in $1 + px + qxx$ contentos $4q > pp$. Quodſi autem hibini factores eſſent reales, et $4q < pp$, tum integrale formulae $\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx}$ a ſolis logarithmis penderet foretque

$$\frac{\mathfrak{Q}}{2q} l(1 + px + qxx + \frac{2\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p}{2q\sqrt{(pp - 4q)}} l \frac{2qx + p - \sqrt{(pp - 4q)}}{2qx + p + \sqrt{(pp - 4q)}}$$

§. 37. Valores autem coefficientium $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ex his aequationibus definientur:

A =

$A = \mathfrak{A} + \mathfrak{P}$
$B = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}p + \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{a}$
$C = \mathfrak{C} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{A}q + \mathfrak{Q}\mathfrak{a} + \mathfrak{P}\mathfrak{b}$
$D = \mathfrak{D} + \mathfrak{C}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{Q}\mathfrak{b} + \mathfrak{P}\mathfrak{c}$
etc.

ex quibus eliciuntur ſequentes valores:

$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{P}$
$\mathfrak{B} = B - Ap + \mathfrak{P}(p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$
$\mathfrak{C} = C - Bp + A(pp - q) - \mathfrak{P}(pp - q - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(p - \mathfrak{a})$
$\mathfrak{D} = D - Cp + B(pp - q) - A(p^3 - 2pq) +$
$\quad \mathfrak{P}(p^3 - 2pq - \mathfrak{a}(p^2 - q) + \mathfrak{b}p - 2) - \mathfrak{Q}(pp - q - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b})$
etc.

vbi cum in ſerie litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. tandem ad euaneſcentes perueniatur, prodibunt aequationes, ex quibus $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt. His autem aequationibus implicabitur haec series

$$1;\ p;\ p^2 - q;\ p^3 - 2pq;\ p^4 - 3p^2q + qq;\ \text{etc.}$$

cuius terminus generalis ſeu indici n reſpondens eſt $=$ $\frac{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)})^n - (\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)})^n}{\sqrt{(pp - 4q)}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = r$ et $\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = s$ atque cum ad coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. euaneſcentes fuerit peruentum, habebitur iſta aequatio indefinita

$$+\mathfrak{P}(r^n \mp \mathfrak{a}r^{n-1} \pm \mathfrak{b}r^{n-2} \mp 2r^{n-3} \text{ etc.} - \mathfrak{P}(s^n - \mathfrak{a}s^{n-1} \pm \mathfrak{b}s^{n-2} \text{ etc.})$$
$$-\mathfrak{Q}(r^{n-1} \mp \mathfrak{a}r^{n-2} \pm \mathfrak{b}r^{n-3} \text{ etc.}) + \mathfrak{Q}(s^{n-1} \mp \mathfrak{a}s^{n-2} \pm \mathfrak{b}s^{n-3} \text{ etc.})$$
$$= Ar^n \mp Br^{n-1} \pm Cr^{n-2} \text{ etc.} - As^n + Bs^{n-1} \pm Cs^{n-2} \text{ etc.}$$

cuius duo caſus ſufficient ad valores ipſorum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinandos.

§. 38. Ponamus breuitatis gratia:

$$Ar^n - Br^{n-1} + Cr^{n-2} - Dr^{n-3} + \text{etc.} = R$$
$$As^n - Bs^{n-1} + Cs^{n-2} - Ds^{n-3} + \text{etc.} = S$$
$$r^{n-1} - \mathfrak{a}r^{n-2} + \mathfrak{b}r^{n-3} - \mathfrak{c}r^{n-4} + \text{etc.} = P$$
$$s^{n-1} - \mathfrak{a}r^{n-2} + \mathfrak{b}r^{n-3} - \mathfrak{c}s^{n-4} + \text{etc.} = Q$$

atque obtinebimus hanc aequationem:

$$\mathfrak{P}Pr - \mathfrak{P}Qs - \mathfrak{Q}P + \mathfrak{Q}Q = R - S$$

hancque pari modo ſequetur iſta in loco $n+1$

$$\mathfrak{P}Pr^2 - \mathfrak{P}Qs^2 - \mathfrak{Q}Pr + \mathfrak{Q}Qs = Rr - Ss$$

ex his eliminando $\mathfrak{Q}$ reperitur:

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}(Pr-Qs) - R + S}{P - Q} = \frac{\mathfrak{P}(Pr^2-Qs^2) - Rr + Ss}{Sr - Qs}$$

hincque obtinebuntur ſequentes determinationes.

$$\mathfrak{P} = \frac{QR-PS}{(r-s)PQ} = \frac{QR-PS}{PQ\sqrt{(pp-4q)}} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{R}{P} - \frac{S}{Q}\right)$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{QRs-PSr}{(r-s)PQ} = \frac{QRs-PSr}{PQ\sqrt{(pp-4q)}} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{Rs}{P} - \frac{Sr}{Q}\right)$$

at in his valoribus eſt independenter ab n;

$$\frac{R}{P} = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{r} - \frac{\mathfrak{a}}{r^2} + \frac{\mathfrak{b}}{r^3} - \frac{\mathfrak{c}}{r^4} + \text{etc.}}$$
$$\frac{S}{Q} = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s}C - \frac{1}{s}D + \text{etc.}}{\frac{1}{s} - \frac{\mathfrak{a}}{s^2} + \frac{\mathfrak{b}}{s^3} - \frac{\mathfrak{c}}{s^4} + \text{etc.}}$$

Denotant autem $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. ſequentes valores

$$\mathfrak{a} = \alpha - p$$
$$\mathfrak{b} = \beta - \alpha p + pp - q$$
$$\mathfrak{c} = \gamma - \beta p + \alpha(pp-q) - (p^3 - 2pq)$$
$$\mathfrak{d} = \delta - \gamma p + \beta(pp-q) - \alpha(p^3 - 2pq) + (p^4 - 3ppq + qq)$$

etc.

vel

vel cum ſit $p = r + s$; et $q = rs$ erit vt ſequitur

$$-\mathfrak{a} = r + s - \alpha$$

$$+\mathfrak{b} = rr + rs + ss - \alpha(r + s) + \beta$$

$$-\mathfrak{c} = r^3 + r^2 s + rss + s^3 - \alpha(rr + rs + ss) + \beta(r + s) - \gamma$$

His valoribus ſubſtitutis prodibit denominator

$$\frac{1}{r} - \frac{\mathfrak{a}}{rr} + \frac{\mathfrak{b}}{r^3} - \frac{\mathfrak{c}}{r^4} + \frac{\mathfrak{d}}{r^5} - \text{etc.}$$

aequalis huic expreſſioni pro n dimenſionibus

$$\frac{n}{r} + \frac{(n-1)s}{rr} + \frac{(n-2)ss}{r^3} + \frac{(n-3)s^3}{r^4} + \frac{(n-4)s^4}{r^5} + \text{etc.}$$

$$-\frac{\alpha}{r}\left(\frac{n-1}{r} + \frac{(n-2)s}{r^2} + \frac{(n-3)s^2}{r^3} + \frac{(n-4)s^3}{r^4} + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{\beta}{r^2}\left(\frac{n-2}{r} + \frac{(n-3)s}{r^2} + \frac{(n-4)s^2}{r^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\frac{\gamma}{r^3}\left(\frac{n-3}{r} + \frac{(n-4)s}{rr} + \text{etc.}\right)$$

etc.

quae ſeries, cum ſint omnes ſummabiles, habebitur

$$\frac{1}{(r-s)^2}\left(nr - (n+1)s + \frac{s^{n+1}}{r^n} - \frac{\alpha}{r}\left((n-1)r - ns + \frac{s^n}{r^{n-1}}\right) + \frac{\beta}{r^2}\left((n-2)r - (n-1)s + \frac{s^{n-1}}{r^{n-2}}\right) - \text{etc.}\right)$$

§. 39. Quoniam autem $1 + px + qxx$ euaneſcit poſito loco x vel $-\frac{1}{r}$ vel $-\frac{1}{s}$, eaque ipſa quantitas eſt diuiſor denominatoris $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. erit quoque poſito pro x vel $-\frac{1}{r}$ vel $-\frac{1}{s}$

$$0 = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{rr} - \frac{\gamma}{r^3} + \frac{\delta}{r^4} - \text{etc.}$$

$$0 = 1 - \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{ss} - \frac{\gamma}{s^3} + \frac{\delta}{s^4} - \text{etc.}$$

Hinc itaque erit

$$\frac{s^{n+1}}{r^n} - \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{s^n}{r^{n-1}} + \frac{\beta}{rr} \cdot \frac{s^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{\gamma}{r^3} \cdot \frac{s^{n-2}}{r^{n-3}} + \text{etc.} = 0$$

atque

$$nr - (n+1)s - \frac{\alpha}{r}(nr - (n+1)s) + \frac{\beta}{r^2}(nr - (n+1)s) - \text{etc.} = 0$$

quae duae expreſſiones ſi coniunctim ſubtrahantur a ſuperiori, transmutabitur iſta expreſſio

$$\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} - \frac{c}{r^4} + \text{etc. in hanc}$$

$$\frac{1}{(r-s)^2}\left(\frac{\alpha(r-s)}{r} - \frac{2\beta(r-s)}{r^2} + \frac{3\gamma(r-s)}{r^3} - \frac{4\delta(r-s)}{r^4} + \text{etc.}\right)$$

quae cum diuidi queat per $r - s$ emergit:

$$\frac{1}{r-s}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \text{etc.}\right)$$

ſimili modo iſta expreſſio:

$$\frac{1}{s} - \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s^3} - \frac{c}{s^4} + \frac{b}{s^5} - \text{etc.}$$

factis ſubſtitutionibus tranſibit in hanc:

$$\frac{1}{s-r}\left(\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \text{etc.}\right)$$

Quare tandem pro §. 38. habebitur:

$$\frac{R}{(r-s)P} = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \text{etc.}\right)}$$

$$\frac{-S}{(r-s)Q} = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \text{etc.}}$$

Hisque inuentis eſt $\mathfrak{P} = \frac{R}{(r-s)P} - \frac{S}{(r-s)Q}$ atque $\mathfrak{Q} = \frac{Rs}{(r-s)P} - \frac{Sr}{(r-s)Q}$; et $2\,\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p = \frac{R}{P} + \frac{S}{Q}$.

§. 40. Etſi hic quantitates r et s habeant valores imaginarios, tamen in valoribus pro $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ imaginaria ſe deſtruunt, atque oriuntur valores reales. Ponatur enim primum productum amborum denominatorum

$\left(\frac{\alpha}{r}\right.$

$$\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \text{etc.}\right)\left(\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \text{etc.}\right) = \mathrm{W}$$

erit ob $rs = q$ et $r + s = p$ multiplicatione peracta

$$\mathrm{W} = \begin{cases} + \frac{\alpha^2}{q} + \frac{4\beta^2}{qq} + \frac{9\gamma^2}{q^3} + \frac{16\delta^2}{q^4} + \frac{25\varepsilon^2}{q^5} + \text{etc.} \\ -p\left(\frac{2\alpha\beta}{qq} + \frac{6\beta\gamma}{q^3} + \frac{12\gamma\delta}{q^4} + \frac{20\delta\varepsilon}{q^5} + \text{etc.}\right) \\ + (pp-2q)\left(\frac{3\alpha\gamma}{q^3} + \frac{8\beta\delta}{q^4} + \frac{15\gamma\varepsilon}{q^5} + \frac{24\delta\zeta}{q^6} + \text{etc.}\right) \\ - (p^3-3pq)\left(\frac{4\alpha\delta}{q^4} + \frac{10\beta\varepsilon}{q^5} + \frac{18\gamma\zeta}{q^6} + \text{etc.}\right) \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ex his inuenitur 𝔓 et 𝔔 vti ſequitur

$$𝔓 = \begin{cases} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha p}{q} - \frac{2\beta(pp-2q)}{qq} + \frac{3\gamma(p^3-3pq)}{q^3} - \frac{4\delta(p^4-4p^2q+2qq)}{q^4} + \text{etc.}\right) \\ - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{W}}\left(\frac{2\alpha}{q} - \frac{2\beta p}{qq} + \frac{3\gamma(pp-2q)}{q^3} - \frac{4\delta(p^3-3pq)}{q^4} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha p}{qq} - \frac{4\beta}{qq} + \frac{3\gamma p}{q^3} - \frac{4\delta(pp-2q)}{q^4} + \text{etc.}\right) \\ - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha(pp-2q)}{q^3} - \frac{2\beta p}{q^3} + \frac{6\gamma}{q^3} - \frac{4\delta p}{q^4} + \text{etc.}\right) \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$𝔔 = \begin{cases} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{W}}\left(2\alpha - \frac{2\beta p}{q} + \frac{3\gamma(pp-2q)}{qq} - \frac{4\delta(p^3-3pq)}{q^3} + \text{etc.}\right) \\ - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha p}{q} - \frac{4\beta}{q} + \frac{[illegible]}{qq} - \frac{[illegible]}{q^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha(pp-2q)}{qq} - \frac{2\beta p}{qq} + \frac{6\gamma}{qq} - \frac{4\delta p}{q^3} + \text{etc.}\right) \\ - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{W}}\left(\frac{\alpha(p^3-3pq)}{q^3} - \frac{2\beta(pp-2q)}{q^3} + \frac{3\gamma p}{q^3} - \frac{8\delta}{q^3} + \text{etc.}\right) \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Inuentis ergo hoc modo 𝔓 et 𝔔 reperietur integrale, quod ex denominatoris factore $1 + px + qxx$ oritur, quippe quod eſt

$$\frac{𝔔}{2q}\, l(1 + px + qxx) + \frac{2𝔓q - 𝔔p}{q\sqrt{(4q-pp)}}\, \mathrm{A\,tang.}\, \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

In caſibus autem particularibus ſaepenumero praeſtat litteras r et s retinere, donec valores pro 𝔓 et 𝔔 fuerint inuenti;

inuenti; etſi enim hi valores ſunt imaginarii, tamen ordo progreſſionis, quo in formulas $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ingrediuntur, facilius apparet, ſimulque ſponte imaginaria ſe tollunt. Huius adeo methodi beneficio omnis formulae differentialis rationalis, vtcunque factoribus imaginariis ſcateat, integralis reale ope logarithmorum et arcuum circularium poterit exhiberi.

§. 41. Quae hic non mediocri labore pro factore trinomiali inuenimus, ea multo facilius directe ex iis quae de factoribus ſimplicibus attulimus, deriuari poſſunt. Sit enim in formula differentiali propoſita

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}$$

vbi x vti poſuimus iam pauciores habeat dimenſiones in numeratore quam in denominatore. Sit inquam $1 + px + qxx$ factor trinomialis, isque realis denominatoris $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 +$ etc. cuiusmodi factores vtique dantur; bini enim factores ſimplices in $1 + px + qxx$ contenti ſunt vel reales vel imaginarii, atque vtroque caſu eorum productum eſt reale. Sint igitur $1 + rx$ et $1 + sx$ bini factores ſimplices ſiue reales ſiue imaginarii, quorum productum ſit $= 1 + px + qxx$ ita vt ſit $r = \frac{p + \sqrt{(pp - 4q)}}{2}$ et $s = \frac{p - \sqrt{(pp - 4q)}}{2}$; et quaerantur integralis partes, quae ex vtroque factore ſimplici oriuntur. Pro primo quidem factore ſi ponatur

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \frac{1}{r^4}E - \text{etc.}}{\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \frac{5\varepsilon}{r^5} - \text{etc.}}$$

erit integralis pars inde oriunda $= \int \frac{R\,dx}{1 + rx}$.

At

At pro altero factore $1+sx$, ſi ponatur:

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \frac{1}{s^4}E - \text{etc.}}{\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \frac{5\varepsilon}{s^5} - \text{etc.}}$$

erit integralis pars inde oriunda $= \int \frac{S\,dx}{1+sx}$.
Quamobrem ex vtroque factore coniunctim hoc eſt ex factore trinomiali $1+px+qxx$ orietur integralis pars haec $\int \frac{R\,dx}{1+rx} + \int \frac{S\,dx}{1+sx} = \int \frac{(R+S)dx + (Rs+Sr)x\,dx}{1+px+qxx}$ vbi tam $R+S$ quam $Rs+Sr$ erunt quantitates reales; atque hoc integrale vel a ſolis logarithmis vel ſimul a quadratura circuli pendebit, prout r et s fuerint vel quantitates reales, vel imaginariae: hocque apprime congruit cum eo, quod ante inuenimus.

§. 42. Simili modo ſi denominator fuerit diuiſibilis per $(1+px+qxx)^2$, atque factores ſimplices ipſius $1+px+qxx$, qui ſint $1+rx$ et $1+sx$ fuerint imaginarii, integralis ~~portio inde oriunda~~ in forma reali dabitur. Cum enim ipſius $(1+px+qxx)^2$ factores ſint $(1+rx)^2$ et $(1+sx)^2$, tractetur vterque modo ſupra expoſito. Scilicet pro factore $(1+rx)^2$ ponatur

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{r^3}\left(1\cdot 2\beta - \frac{2\cdot 3\gamma}{r} + \frac{3\cdot 4\delta}{r^2} - \text{etc.}\right)}$$

eritque integrale hinc oriundum:

$$\frac{2d\cdot\frac{R}{r}}{dr}\int\frac{r\,dx}{1+rx} + 2\cdot 1\cdot\frac{R}{r^2}\int\frac{r\,dx}{(1+rx)^2}$$

Simili modo pro factore $(1+sx)^2$ ponatur:

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{s^3}\left(1\cdot 2\beta - \frac{2\cdot 3\gamma}{s} + \frac{3\cdot 4\delta}{s^2} - \text{etc.}\right)}$$

 atque

atque hinc orietur integralis portio:

$$\frac{2d.\frac{S}{s}}{ds}\int\frac{s\,dx}{1+sx}+2.1\frac{S}{s^2}\int\frac{s\,dx}{(1+sx)^2}$$

quae duae formae ſi r et s fuerint quantitates imaginariae inuicem addantur, prodibitque formula differentialis integranda realis huius formae

$$\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx+\mathfrak{R}x^2dx+\mathfrak{S}x^3dx}{(1+px+qxx)^2}$$

cuius integrale reſoluitur in has duas partes

$$\frac{\mathfrak{P}p-2\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}\frac{p}{q}-\mathfrak{S}\left(\frac{pp-2q}{qq}\right)+\left(2\mathfrak{P}q-\mathfrak{Q}p+\mathfrak{R}\left(\frac{pp-2q}{q}\right)-\mathfrak{S}\left(\frac{p^3-3pq}{qq}\right)\right)x}{(4q-pp)(1+px+qxx)}$$

$$+\int\frac{\left(2\mathfrak{P}q-\mathfrak{Q}p+2\mathfrak{R}-\mathfrak{S}\frac{p}{q}\right)dx-\mathfrak{S}\left(\frac{pp-4q}{q}\right)xdx}{(4q-pp)(1+px+qxx)}$$

quae ergo integratio ope logarithmorum et arcuum circularium abſolui poteſt. Pari autem modo erit procedendum, ſi denominatoris factor fuerit $(1+px+qxx)^3$ vel alia altior poteſtas quaecunque.

§. 43. Ex his igitur intelligitur, quomodo formulae cuiuscunque differentialis rationalis integrale inueniri atque adeo in forma reali exhiberi oporteat; poſtquam enim differentiale per modos prius expoſitos ad formam poſterius pertractatam fuerit perductum, tum totius negotii cardo vertetur in inuentione factorum realium denominatoris, qui, vti oſtendimus, ſunt vel ſimplices binomiales vel trinomiales; atque quilibet factor dabit partem integralis quaeſiti; quare ſi methodo praeſcripta ex ſingulis factoribus integralis partes reſpondentes fuerint inuentae, tum omnium harum partium aggregatum erit integrale quaeſitum

tum. Ex his porro patet veritas non exigui momenti, quod omnis formulae differentialis rationalis perpetuo conceſſis logarithmis et arcubus circularibus exhiberi queat; ita vt integratio ſi algebraice abſolui nequeat alias quantitates transcendentes non requirat praeter logarithmos et arcus circulares. Cum igitur modus, quo ad integrale perueniendum eſt, ſatis ſit expoſitus; nil aliud ſuper eſt, niſi vt vſum eius in aliquot exemplis alias difficilioribus monſtremus; quae partim iam ſint ab aliis tractata, partim hic de nouo producta vel ſaltem fuſius expoſita; In hoc autem negotio, quia praecipuum opus in inuentione factorum verſatur, alia exempla proferre non licet, niſi in quibus factores denominatoris actu exhiberi queant; hanc obrem in ſubſidium vocabimus praecipua illa artificia a Celeb. Moivraeo aliisque excogitata, quorum beneficio factores propoſitae cuiuspiam expreſſionis aſſignari poſſunt, ſicque plura occurrent ad algebrae finitae incrementum facientia, quae etſi huc minus pertinent, tamen fuſius proſequemur.

Problema 1.

§. 44. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m\,dx}{1+x^{2n}}$ exiſtente m numero integro minore, quam $2n$.

Solutio.

Si exponens m maior eſſet quam $2n$ tum per diuiſionem formula ad caſum praeſentem perduceretur; perſpicuum autem eſt denominatorem nullum omnino factorem ſimplicem realem habere, ex quo factores trinomiales quaeri debebunt reales quorum numerus erit n. Sit huiusmodi

factor $= 1 + px + qxx$ realis, qui ſit productum ex his imaginariis $(1 + rx)(1 + sx)$, exiſtente $r + s = p$ et $rs = q$. His ad paragr. 41. reuocatis erit $R = (-\frac{1}{r})^m : -2n(-\frac{1}{r})^{2n} = \frac{-(-r)^{2n-m}}{2n}$ in ſubſidium vocatis quae §. 28. ſunt tradita. Simili modo eſt $S = \frac{-(-s)^{2n-m}}{2n}$; vnde ex factore $1 + px + qxx$ orietur iſta integralis pars

$$\int \frac{-((-r)^{2n-m} + (-s)^{2n-m})\,dx + rs\,((-r)^{2n-m-1} + (-s)^{2n-m-1})\,x\,dx}{2n(1 + px + qxx)}$$

eſt vero $r = \frac{p + \sqrt{(pp-4q)}}{2}$ et $s\ \frac{p - \sqrt{(pp-4q)}}{2}$

Formetur hinc ſeries, cuius terminus generalis ſit $= (-r)^k + (-s)^k$, eiusque termini ita progredientur

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -p; & +(pp-2q); & -(p^3-3pq); & +(p^4-4p^2q+2qq);\ \text{etc.} \end{matrix}$$

ponatur huius ſeriei terminus, cuius index eſt $2n - m - 1 = M$ et terminus ſequens cuius index eſt $= 2n - m$ ſit $= N$, habebiturque iſtud integrale

$$\int \frac{-N\,dx + Mqx\,dx}{2n(1 + px + qxx)}$$

quod per logarithmos et arcus circulares dat:

$$+ \frac{M}{4n} l(1 + px + qxx) - \frac{2N - Mp}{2n\sqrt{(4q-pp)}} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2 + px}$$

at ex natura ſerierum recurrentium M et N ita a ſe inuicem pendent, vt ſit $N^2 + MNp + M^2q = -q^{2n-m-1}(pp - 4q)$ ſeu $N = -\frac{Mp}{2} + (4q - pp)(q^{2n-m-1} - \frac{M^2}{4})$ Cum ergo ſit $2N + Mp = \sqrt{(4q-pp)(4q^{2n-m-1} - M^2)}$ erit integrale formulae $\int \frac{-N\,dx + Mqx\,dx}{2n(1 + px + qxx)} =$

$$+ \frac{M}{4n} l(1 + px + qxx) - \frac{\sqrt{(4q^{2n-m-1} - M^2)}}{2n} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2 + px}$$

eſtque $M = \pm \left(\frac{p + \sqrt{(pp-4q)}}{2}\right)^{2n-m-1} \pm \left(\frac{p - \sqrt{(pp-4q)}}{2}\right)^{2n-m-1}$

vbi

vbi ſigna ſuperiora $+$ valent ſi $2-m-1$ fuerit numerus par, ſin ſit impar, ſigna inferiora $-$ ſunt capienda. Haec expreſſio M autem commode per multiplicationem arcuum circularium exprimi poteſt, ſi quidem eſt $4q > pp$, vti ponimus. Nam ſi arcus cuiuspiam circuli Φ coſinus fuerit $= u$, ita vt ſit $\Phi = \text{A cof.} u$ poſito ſinu toto $= 1$. erit coſinus arcus $k\,\Phi = \frac{(u+\sqrt{(uu-1)})^k + (u-\sqrt{(uu-1)})^k}{2}$. Quodſi iam ponamus $u = \frac{p}{2\sqrt{q}}$, ita vt ſit $\Phi = \text{A cof.} \frac{p}{2\sqrt{q}}$, orietur: $M = \mp 2\,q^{\frac{2n-m-1}{2}} \text{cof. A.} (2n-m-1)\,\Phi$; vbi ſignum $+$ habet locum ſi fuerit $2n-m-1$ numerus par, contrarium autem $-$, ſi $2n-m-1$ ſit numerus impar. Hinc fiet $\sqrt{(4q^{2n-m-1} - MM)} = \mp 2\,q^{\frac{2n-m-1}{2}} \text{ſin. A.} (2n-m-1)\,\Phi$; ideoque integrale ex denominatoris factore $1+px+qxx$ oriundum erit $= \pm \frac{q^{\frac{2n-m-1}{2}} \text{cof. A.} (2n-m-1)\Phi}{2n} l(1+px+qxx) \mp \frac{q^{\frac{2n-m-1}{2}} \text{ſin. A.} (2n-m-1)\Phi}{n} \text{A tang.} \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$ exiſtente Φ arcu circuli, cuius coſinus eſt $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$, in circulo cuius radius $= 1$. Valent autem ſigna ſuperiora ſi $2n-m-1$ fuerit numerus par, inferiora autem ſi ſit numerus impar. Cum igitur ſinguli factores denominatoris $1+x^{2n}$ huius formae $1+px+qxx$ praebeant partes integralis, quae ex cognitis coefficientibus p et q modo praeſcripto aſſignari queant, hos ipſos factores trinomiales denominatoris $1+x^{2n}$ eruere debemus. At ex theoremate quodam Moivreano ſi habeatur expreſſio huiusmodi $1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots$

 $+m$

$+ mx^n + \ldots\ldots + cx^{2n-3} + bx^{2n-2} + ax^{2n-1} + x^{2n}$
cuius coefficientes finales ordine retrogrado congruunt cum coefficientibus initialibus; ea reſoluitur in factores trinomiales $1 + \alpha x + xx$; $1 + \beta x + xx$; $1 + \gamma x + xx$; $1 + \delta x + xx$; etc. quorum numerus eſt n eruntque coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. radices huius aequationis n dimenſionum.

$$Z^n - Az^{n-1} + Bz^{n-2} - Cz^{n-3} + Dz^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

cuius coefficientes ſequentem tenent legem:

$$A = a$$
$$B = b - n$$
$$C = c - (n-1)a$$
$$D = d - (n-2)b + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$
$$E = e - (n-3)c + \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}a$$
$$F = f - (n-4)d + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}b - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$G = g - (n-5)e + \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}c - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a$$
$$H = h - (n-6)f + \frac{(n-4)(n-7)}{1 \cdot 2}d - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

His valoribus ſubſtitutis habebimus hanc aequationem

$$\left.\begin{array}{l} z^n - nz^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-6} + \text{etc.}) \\ - a(z^{n-1} - (n-1)z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}z^{n-5} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-7} + \text{etc.}) \\ + b(z^{n-2} - (n-2)z^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}z^{n-6} - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-8} + \text{etc.}) \\ - c(z^{n-3} - (n-3)z^{n-5} + \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}z^{n-7} - \frac{(n-3)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-9} + \text{etc.}) \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Ad

Ad expreſſionem hanc diſtinctius cognoſcendam ſit ψ arcus circuli cuius coſinus $= \frac{z}{2}$, erit

$$2 \text{ coſ. A}. k\psi = z^k - kz^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1 \cdot 2} z^{k-4} - \frac{k(k-4)(k-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{k-6} + \text{etc.}$$

vnde ſuperior aequatio pro incognita z transmutabitur in ſequentem:

$$\text{coſ. A}. n\psi - a \text{ coſ. A}(n-1)\psi + b \text{ coſ. A}(n-2)\psi - c \text{ coſ. A}(n-3)\psi + \ldots + \frac{m}{2} = 0$$

Ex hoc aequatione reperientur n diuerſi valores pro ψ, quorum coſinus bis ſumti dabunt totidem valores quaeſitos pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. Ex hac generali reductione theorematis Moivreani pro noſtro caſu, quo omnes litterae a, b, c, etc. euaneſcunt, obtinemus hanc ſimplicem aequationem coſ. A. $n\psi = 0$. Quaeramus ergo omnes arcus, quorum coſinus ſunt $= 0$, qui ſunt

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2};\ \frac{11\pi}{2};\ \text{etc.}$$

denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam ex his valoribus capiantur n, qui erunt totidem valores pro $n\psi$, vnde ipſius ψ valores erunt ſequentes arcus in circulo cuius radius $= 1$

$$\frac{\pi}{2n};\ \frac{3\pi}{2n};\ \frac{5\pi}{2n};\ \frac{7\pi}{2n};\ \frac{9\pi}{2n};\ \frac{11\pi}{2n};\ \ldots\ldots\ \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Ex his valores pro coefficientibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erunt

$2 \text{ coſ. A}. \frac{\pi}{2n}$; $2 \text{ coſ. A}. \frac{3\pi}{2n}$; $2 \text{ coſ. A}. \frac{5\pi}{2n}$; $2 \text{ coſ. A}. \frac{7\pi}{2n}$; $\ldots$; $2 \text{ coſ. A} \frac{(2n-1)\pi}{2n}$. At eſt coſ. A. $\frac{(2n-1)\pi}{2n} = -$ coſ. A. $\frac{\pi}{2n}$; coſ. A $\frac{(2n-3)\pi}{2n} = -$ coſ. A. $\frac{3\pi}{2n}$ vnde ſi n fuerit numerus par, valores pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erunt.

$\pm 2 \text{ coſ. A}. \frac{\pi}{2n}$; $\pm 2 \text{ coſ. A}. \frac{3\pi}{2n}$; $\pm 2 \text{ coſ. A}. \frac{5\pi}{2n}$; $\ldots \pm 2$ coſ. A. $\frac{(n-1)\pi}{2n}$ ſin autem n ſit numerus impar, tum valores litte-

litterarum α, β, γ, δ, etc. erunt ſequentes

$\pm 2 \operatorname{coſ.A}. \frac{\pi}{2n}$; $\pm 2 \operatorname{coſ.A}. \frac{3\pi}{2n}$; $\pm 2 \operatorname{coſ.A}. \frac{5\pi}{2n}$; .... ± 2 coſ. A. $\frac{(n-2)\pi}{2n}$ $+ 2 \operatorname{coſ.A}. \frac{\pi}{2}$.

Ex quo patet caſus, quibus n vel eſt numerus par vel impar, probe a ſe inuicem eſſe diſtinguendos in noſtro inſtituto.

Denominatoris ergo noſtri $1 + x^{2n}$ factores trinomiales omnes continentur in hac forma generali

$$1 + 2x \operatorname{coſ.A}. \frac{k\pi}{2n} + xx$$

denotante k omnes numeros impares minores quam $2n$. Comparetur forma aſſumta $1 + px + qxx$ cum hac inventa, erit $q = 1$, et $p = + 2 \operatorname{coſ.A}. \frac{k\pi}{2n}$: hincque $\frac{p}{2\sqrt{q}} = \operatorname{coſ.A}. \frac{k\pi}{2n}$. Cum iam Φ ſit arcus circuli cuius coſinus eſt $\frac{p}{2\sqrt{q}}$, erit $\Phi = \frac{k\pi}{2n}$. Ex iſto igitur factore generali reperietur pars integralis inde oriunda haec:

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{coſ.A}. \frac{(2n-m-1)k\pi}{2n} \, l(1 + 2x \operatorname{coſ.A}. \tfrac{k\pi}{2n} + xx) \mp \frac{1}{n} \operatorname{ſin.A}. \frac{(2n-m-1)k\pi}{2n} \operatorname{A tang.} \frac{x \operatorname{ſin.A}. \frac{k\pi}{2n}}{1 + x \operatorname{coſ.A}. \frac{k\pi}{2n}}$$

vbi ſignorum ambiguorum ante coefficientes ſuperiora valent, ſi $2n-m-1$ ſit numerus par, inferiora ſi impar. In caſu quo $k = n$, quo occurrit ſi n eſt numerus impar, tum fit $\operatorname{coſ.A}. \frac{k\pi}{2n} = 0$, et denominatoris diuiſor erit $1 + xx$ ex quo naſcitur integrale

$$\pm \frac{1}{2n} \operatorname{coſ.A}. \frac{(2n-m-1)\pi}{2} \, l(1+xx) \mp \frac{1}{n} \operatorname{ſin.A}. \frac{(2n-m-1)\pi}{2} \operatorname{A tang.} x$$

Quod ſi iam loco k ſucceſſiue ſubſtituantur omnes numeri impares minores quam $2n$, et omnes expreſſiones in

vnam

vnam ſummam colligantur, habebitur integrale quaeſitum formulae differentialis propoſitae

$$\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$$

ſi quidem m fuerit numerus minor quam $2n$.

Q. E. I.

Exemplum. 1.

§. 45. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+xx}$ integrale inuenire: Hic fit $m=0$; $n=1$; $2n-m-1=1$ numero impari, valent ergo ſigna inferiora, habebiturque

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{coſ. A.}\tfrac{k\pi}{2}\, l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{k\pi}{2}+xx)+\text{ſin. A.}\tfrac{k\pi}{2}\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{k\pi}{2}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{k\pi}{2}}$$

Ob $2n=2$ habebit k vnicum valorem nempe $k=1$ ex quo propter coſ. A. $\frac{\pi}{2}=0$, et ſin. A. $\frac{\pi}{2}=1$, reperietur integrale quaeſitum $=$ A tang. x.

Exemplum. 2.

§. 46. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^4}$ integrale inuenire: Hic fit $m=0$; $n=2$; $2n-m-1=3$ numero impari, ita vt ſigna inferiora valeant: habetur ergo

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{coſ. A.}\tfrac{3k\pi}{4}\, l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{k\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. A.}\tfrac{3k\pi}{4}\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{k\pi}{4}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{k\pi}{4}}$$

ob $2n=4$ tribuendi ſunt ipſi k duo valores 1 et 3 ſucceſſiue, ex quo integrale quaeſitum erit:

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{coſ. A.}\tfrac{3\pi}{4}\,.\,l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. A.}\tfrac{3\pi}{4}\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{4}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{4}}$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{coſ. A.}\tfrac{9\pi}{4}\,.\,l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{3\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. A.}\tfrac{9\pi}{4}.\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{3\pi}{4}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{3\pi}{4}}$$

At eſt coſ. A. $\frac{3\pi}{4} = -$coſ. A. $\frac{\pi}{4}$; et coſ. A. $\frac{9\pi}{4} =$ coſ. A $\frac{\pi}{4}$; itemque ſin. A. $\frac{3\pi}{4} =$ ſin. A. $\frac{\pi}{4}$ et ſin. A. $\frac{9\pi}{4} =$ ſin. A. $\frac{\pi}{4}$ vnde tandem formulae propoſitae integrale prodit:

$$+\tfrac{1}{4}\,\text{coſ. A.}\tfrac{\pi}{4}\,.\,l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. A.}\tfrac{\pi}{4}.\ \text{A. tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{4}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{4}}$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{coſ. A.}\tfrac{\pi}{4}\,l(1-2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\,\text{ſin. A.}\tfrac{\pi}{4}.\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{4}}{1-x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{4}}$$

quod ad formam ſimpliciorem reductum ob ſin. A. $\frac{\pi}{4} =$ coſ. A. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dabit

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+x\sqrt{2}+xx}{1-x\sqrt{2}+xx}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ \text{A tang.}\frac{x\sqrt{2}}{1-xx}.$$

Exemplum. 3.

§. 47. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^6}$ integrale inuenire. Hic eſt $m=0$, $n=3$, $2n-m-1=5$ numero impari, vnde haec habetur partium integralis forma

$$-\tfrac{1}{6}\,\text{coſ. A.}\tfrac{5k\pi}{6}\,l(1+2x\,\text{coſ. A.}\tfrac{k\pi}{6}+xx)+\tfrac{1}{3}\,\text{ſin. A.}\tfrac{5k\pi}{6}\ \text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{k\pi}{6}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{k\pi}{6}}$$

vbi loco k ſucceſſiue ſubſtitui debent numeri 1, 3, 5, at eſt

coſ.

$\operatorname{coſ.} A. \frac{5\pi}{6} = - \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ſin.} A. \frac{5\pi}{6} = \operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{coſ.} A. \frac{15\pi}{6} = \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ſin.} A. \frac{15\pi}{6} = \operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{coſ.} A. \frac{25\pi}{6} = \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{ſin.} A. \frac{25\pi}{6} = \operatorname{ſin.} A \frac{\pi}{6}$

Ex quibus ob $\operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{2} = 0$ et $\operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{2} = 1$ colligitur integrale quaeſitum:

$$+ \tfrac{1}{6} \operatorname{coſ.} A. \tfrac{\pi}{6}\, l\,(1 + 2x \operatorname{coſ.} A. \tfrac{\pi}{6} + xx) + \tfrac{1}{3} \operatorname{ſin.} A. \tfrac{\pi}{6}\; A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{6}}{1 + x \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{6}}$$

$$- \tfrac{1}{6} \operatorname{coſ.} A. \tfrac{\pi}{6}\, l\,(1 - 2x \operatorname{coſ.} A. \tfrac{\pi}{6} + xx) + \tfrac{1}{3} A \operatorname{tang.} x$$

$$+ \tfrac{1}{3} \operatorname{ſin.} A. \tfrac{\pi}{6} .\; A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A. \frac{5\pi}{6}}{1 + x \operatorname{coſ.} A. \frac{5\pi}{6}}$$

Cum iam ſit $\operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; erit integrale

$$\frac{\sqrt{3}}{12}\, l\, \frac{1 + x\sqrt{3} + xx}{1 - x\sqrt{3} + xx} + \tfrac{1}{3} A \operatorname{tang.} x + \tfrac{1}{6} A \operatorname{tang.} \frac{x}{2 + x\sqrt{3}} + \tfrac{1}{6} A \operatorname{tang.} \frac{x}{2 - x\sqrt{3}}.$$

Exemplum. 4.

§. 48. Formulae differentialis $\frac{dx}{1 + x^8}$ integrale inuenire.

Hic eſt $m = 0$, $n = 4$, et $2n - m - 1 = 7$, ex quo erit partium integralis forma:

$$- \tfrac{1}{8} \operatorname{coſ.} A. \tfrac{7k\pi}{8}\, l\,(1 + 2x \operatorname{coſ.} A. \tfrac{k\pi}{8} + xx) + \tfrac{1}{4} \operatorname{ſin.} A. \tfrac{7k\pi}{8}\; A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A. \frac{k\pi}{8}}{1 + x \operatorname{coſ.} A. \frac{k\pi}{8}}$$

At quia k eſt numerus impar quippe 1, 3, 5, 7 ſucceſſiue eſt $- \operatorname{coſ.} A. \frac{7k\pi}{8} = \operatorname{coſ.} A. \frac{k\pi}{8}$; et $\operatorname{ſin.} A. \frac{7k\pi}{8} = \operatorname{ſin.} A. \frac{k\pi}{8}$ vnde ſubſtituendo loco k valores 1, 3, 5, 7, erit integrale

$$+ \tfrac{1}{8} \operatorname{coſ.} A. \tfrac{\pi}{8}\, l\, \frac{1 + 2x \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{8} + xx}{1 - 2x \operatorname{coſ.} A. \frac{\pi}{8} + xx} + \tfrac{1}{4} \operatorname{ſin.} A. \tfrac{\pi}{8}\; A \operatorname{tang.} \frac{2x \operatorname{ſin.} A. \frac{\pi}{8}}{1 - xx}$$

$$+\tfrac{1}{8}\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{3\pi}{8}\;l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{3\pi}{8}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{3\pi}{8}+xx}+\tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,A.\tfrac{3\pi}{8}\;A\,\text{tang.}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\frac{3\pi}{8}}{1-xx}$$

Exemplum 5.

§. 49. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^{2n}}$ integrale invenire.

Si $2n$ fuerit numerus pariter par, ſeu n numerus par, tum integrale erit

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{\pi}{2n}\;l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,A.\tfrac{\pi}{2n}\;A\,\text{tang.}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\frac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{3\pi}{2n}\;l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{3\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{3\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,A.\tfrac{3\pi}{2n}\;A\,\text{tang}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\frac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{5\pi}{2n}\;l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{5\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,A.\tfrac{5\pi}{2n}\;A\,\text{tang}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\frac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}\;l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{(n-1)\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\frac{(n-1)\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,A.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}\;A\,\text{tang.}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\frac{(n-1)\pi}{2n}}{1-xx}$$

Sin autem $2n$ fuerit numerus impariter par, ſeu n numerus impar, tum erit integrale

+

$$+\frac{1}{2n}\text{coſ.}A.\frac{\pi}{2n}\,l\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\text{ſin.}A.\frac{\pi}{2n}.A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\frac{1}{2n}\text{coſ.}A.\frac{3\pi}{2n}\,l\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{3\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{3\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\text{ſin.}A.\frac{3\pi}{2n}.A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\frac{1}{2n}\text{coſ.}A.\frac{5\pi}{2n}\,l\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{5\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\text{ſin.}A.\frac{5\pi}{2n}.A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2n}\text{coſ.}A\frac{(n-2)\pi}{2n}\,l\frac{1+2x\,\text{coſ.}A\frac{(n-2)\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A\frac{(n-2)\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\text{ſin.}A.\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

$$A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A\frac{(n-2)\pi}{2n}}{1-xx}+\frac{1}{n}A\,\text{tang.}\,x$$

Exemplum 6.

§. 50. Formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$ integrale invenire exiſtente m numero pari.

Quoniam m eſt numerus par erit $2n-m-1$ numerus impar, ideoque ſigna inferiora valent; Porro autem erit $\text{coſ.}A\frac{(2n-m-1)k\pi}{2n}=-\text{coſ.}A\frac{(m+1)k\pi}{2n}$ ob k numerum imparem et $\text{ſin.}A\frac{(2n-m-1)k\pi}{2n}=\text{ſin.}A\frac{(m+1)k\pi}{2n}$; tum etiam habetur

betur $\text{coſ.}\,A\,\frac{(m+1)(2n-k)\pi}{2n} = -\,\text{coſ.}\,A\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}$ atque $\text{ſin.}\,A.\,\frac{(m+1)(2n-k)\pi}{2n} = \text{ſin.}\,A.\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}$.

His poſitis diſtinguendi ſunt caſus, quibus n eſt vel numerus par vel impar.

Ac primo quidem ſi n eſt numerus par erit integrale

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}A.\frac{(m+1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}A.\frac{(m+1)\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}A.\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{3\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{3\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}A.\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}A.\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{5\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}A.\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}A.\frac{(n-1)(m+1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}A.\frac{(n-1)\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}A.\frac{(n-1)\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}A.\frac{(n-1)(m+1)}{2n}\,A\,\text{tang.}\frac{2x\,\text{ſin.}A.\frac{(n-1)\pi}{2n}}{1-xx}$$

Deinde ſi n ſit numerus impar erit integrale:

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{coſ.}\,A.\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.}\,A.\,\frac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{coſ.}\,A.\,\frac{\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}A.\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,A\,\text{tang.}\,\frac{2x\,\text{ſin.}\,A.\,\frac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

+

$$+ \frac{1}{2n}\operatorname{coſ.} A. \frac{3(m+1)\pi}{2n}\, l\, \frac{1+2x\operatorname{coſ.} A. \frac{3\pi}{2n}+xx}{1-2x\operatorname{coſ.} A. \frac{3\pi}{2n}+xx} + \frac{1}{n}\operatorname{ſin.} A. \frac{3(m+1)\pi}{2n}\, A\, \mathrm{tang.} \frac{2x\operatorname{ſin.} A. \frac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+ \frac{1}{2n}\operatorname{coſ.} A. \frac{5(m+1)\pi}{2n}\, l\, \frac{1+2x\operatorname{coſ.} A. \frac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\operatorname{coſ.} A. \frac{5\pi}{2n}+xx} + \frac{1}{n}\operatorname{ſin.} A. \frac{5(m+1)\pi}{2n}\, A.\, \mathrm{tang.} \frac{2x\operatorname{ſin.} A. \frac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{2n}\operatorname{coſ.} A. \frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\, l\, \frac{1+2x\operatorname{coſ.} A \frac{(n-2)\pi}{2n}+xx}{1-2x\operatorname{coſ.} A \frac{(n-2)\pi}{2n}+xx} + \frac{1}{n}\operatorname{ſin.} A. \frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\, A\, \mathrm{tang.} \frac{2x\operatorname{ſin.} A. \frac{(n-2)\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+ \frac{1}{n}\operatorname{ſin.} A. \frac{(m+1)\pi}{2n}\, A\, \mathrm{tang.}\, x.$$

vbi ſi m eſt numerus pariter par, erit ſin. A. $\frac{(m+1)\pi}{2} = 1$ at ſi m eſt impariter par, erit ſin. A. $\frac{(m+1)\pi}{2} = -1$.

Exemplum. 7.

§. 51. Formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$ integrale inuenire, ſi m ſit numerus impar.

Quoniam $2n-m-1$ eſt numerus par, ſigna ſuperiora valent, eritque integralis pars quaeuis huius formae

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\; l\left(1+2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{2n}+xx\right)-\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\,\text{A. tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{k\pi}{2n}}{1+x\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{2n}}$$

vbi loco k omnes numeri impares vsque ad $2n-1$ ſubſtitui debent. Si pro k ponamus $2n-k$, habebitur haec forma

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\; l\left(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{2n}+xx\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\,.\,\text{A. tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{k\pi}{2n}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{2n}}$$

quae duae formae coniunctim ſumtae dabunt:

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\; l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(m+1)k\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{k\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{k\pi}{n}}$$

Hoc modo bini valores ipſius k coniunguntur, vnde ſi n ſit numerus par integrale reperitur ſi loco k ſucceſſiui omnes numeri impares vsque ad $n-1$ ſubſtituantur, erit ergo integrale:

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\; l\left(1-2xx\,\text{coſ. A}\,\frac{\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,\text{A. tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\; l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{3\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\; l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{5\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n}}$$

$\vdots$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{(n-1)(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{coſ. A}\,\frac{(n-1)\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(n-1)(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{(n-1)\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A}\,\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

Quodſi autem n ſit numerus impar, tum loco k ſubſtitui debent omnes numeri impares vsque ad $n-2$, et numerus impar medius n erit ſolitarius, vnde ſequens prodibit integrale.

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{3\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin A.}\,\frac{5\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n}}$$

$\vdots$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A}\,\frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{coſ. A}\,\frac{(n-2)\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\,\text{ſin. A}\,\frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{ſin. A.}\,\frac{(n-2)\pi}{n}}{1-xx\,\text{coſ. A.}\,\frac{(n-2)\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{coſ. A}\,\frac{(m+1)\pi}{2}\,l(1+xx)$$

vbi coſ. $A \frac{(m+1)\pi}{2}$ erit vel $+1$ vel -1, prout $m+1$ fuerit vel numerus pariter par vel impariter par.

Problema 2.

§. 52. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n+1}}$, exiſtente m numero integro minore quam $2n+1$.

Solutio.

Huius formulae denominator $1+x^{2n+1}$ vnum habet factorem realem $1+x$, reliqui factores ſimplices omnes ſunt imaginarii; eorumque adeo loco factores trinomiales accipi debent. Quod ad factorem ſimplicem $1+x$ attinet; intelligitur ſi pro eo ponatur $1+rx$, inde hanc integralis partem eſſe orituram $\frac{-(-r)^{2n-m+1}}{(2n+1)} \int \frac{dx}{1+rx}$. Sit ergo $r=1$, atque ex denominatoris factore $1+x$ naſcetur integralis pars $\frac{-(-1)^{2n-m+1}}{(2n+1)} l(1+x) = \frac{(-1)^{2n-m}}{(2n+1)} l(1+x)$ quae adeo erit $\pm \frac{1}{2n+1} l(1+x)$ vbi ſignum $+$ valet, ſi $2n-m$ fuerit numerus par, ſeu ſi m ſit numerus par, alterum vero ſignum $-$ valet, ſi m ſit numerus impar.

Quod iam ad factores trinomiales attinet, ſit eorum quilibet $1+px+qxx$; atque ex ſolutione praecedentis problematis ponendo $2n+1$ loco $2n$ colligitur integralis pars ex hoc factore oriunda $=$

$$\pm q^{\frac{2n-m}{2}} \frac{\text{coſ.} A(2n-m)\Phi}{2n+1} l(1+px+qxx) \mp 2q^{\frac{2n-m}{2}} \frac{\text{ſin.} A(2n-m)\Phi}{2n+1} \text{A tang.} \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

de-

denotante Φ arcum circuli, cuius coſinus $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$; valent autem ſignorum ambiguorum ſuperiora, ſi $2n-m$ fuerit numerus par, hoc eſt ſi m fuerit numerus par, ſin autem m ſit numerus impar, valebunt ſigna inferiora.

Iam ad factores trinomiales inueniendos diuidatur denominator $1+x^{2n+1}$ per factorem ſimplicem $1+x$, prodibitque quotus:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots-x^{2n-3}+x^{2n-2}-x^{2n-1}+x^{2n}$$

cuius factores trinomiales quaeri oportet, id quod fiet ope theorematis in ſolutione praecedente adhibiti. Erunt ſcilicet factores trinomiales huiusmodi $1+\alpha x+xx$; $1+\beta x+xx$; $1+\gamma x+xx$ etc. quorum numerus erit n, et cum ſit $a=-1$, $b=+1$, $c=-1$, etc. formanda eſt aequatio

$$\text{coſ.} A n\psi+\text{coſ.} A(n-1)\psi+\text{coſ.} A(n-2)\psi+\ldots\ldots+\text{coſ.} A\psi+\tfrac{1}{2}=0$$

ex qua aequatione n valores pro arcu ψ orientur, quorum coſinus bis ſumti in loca litterarum α, β, γ, etc. ſubſtitui debent. Aequatio autem haec reſolui poterit ex iſto principio, quod coſinus arcuum in arithmetica progreſſione creſcentium tenent ſeriem recurrentem: eſt nempe $\text{coſ.} A. n\psi = z\,\text{coſ.} A(n-1)\psi - \text{coſ.} A(n-2)\psi$ exiſtente $\text{coſ.} A\psi = \frac{z}{2}$. Cum iam ſit

$$+\text{coſ.} A. n\psi+\text{coſ.} A.(n-1)\psi+\ldots+\text{coſ.} A. 2\psi+\text{coſ.} A.\psi+1=\tfrac{1}{2}$$

erit

$$\begin{aligned}&+z\,\text{coſ.} A n\psi+z\,\text{coſ.} A(n-1)\psi+z\,\text{coſ.} A(n-2)\psi+\ldots+z\,\text{coſ.} A\psi+z=\tfrac{z}{2}\\&-\text{coſ.} A n\psi-\text{coſ.} A(n-1)\psi-\text{coſ.} A(n-2)\psi-\text{coſ.} A(n-3)\psi-\ldots\ldots-1=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

ſubtrahantur inferiores aequationes a ſuperiore, orietur

$$(1-z)\,\text{coſ.} A n\psi+\text{coſ.} A(n-1)\psi+\text{coſ.} A.\psi+1-z=1-\tfrac{z}{2}$$

 quae

quae ob coſ. A $\psi = \frac{z}{2}$ transmutatur in hanc

$(1 - z)$ coſ. A. $n\psi$ + coſ. A $(n - 1)\psi = 0$ ſeu

coſ. A. $n\psi$ − 2 coſ. A. ψ. coſ. A $n\psi$ + coſ. A $(n - 1)\psi = 0$

at eſt coſ. A $(n - 1)\psi$ = coſ. A. ψ. coſ. A. $n\psi$ + ſin. A ψ ſin. A. $n\psi$

erit ergo

$(1 -$ coſ. A. $\psi)$ coſ. A. $n\psi$ + ſin. A. ψ. ſin. A $n\psi = 0$; vnde concluditur fore

tang. A. $\frac{\psi}{2}$ + tang. A. $n\psi = 0$.

At ex natura tangentium conſtat eſſe:

tang. A. $\frac{\psi}{2}$ + tang. A $(k\pi - \frac{\psi}{2}) = 0$

denotante k numerum quemcunque integrum; ex quo erit $n\psi = k\pi - \frac{\psi}{2}$, hincque $\psi = \frac{2k\pi}{2n+1}$. Subſtituendo ergo pro k ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, 4 . . . . . n, oriuntur n valores pro arcu ψ, quorum coſinus bis ſumti dabunt coefficientes α, β, γ, δ, etc. in factoribus $1 + \alpha x + xx$; $1 + \beta x + xx$; $1 + \gamma x + xx$; etc. Quilibet ergo factor continetur in hac forma $1 + 2x$ coſ. A. $\frac{2k\pi}{2n+1} + xx$. Quare cum pro factore generali aſſumſerimus hanc formam $1 + px + qxx$ erit $q = 1$ et $p = 2$ coſ. A $\frac{2k\pi}{2n+1}$ atque $\frac{p}{2\sqrt{q}}$ = coſ. A. $\frac{2k\pi}{2n+1}$; quia nunc Φ eſt arcus, cuius coſinus $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$ erit $\Phi = \frac{2k\pi}{2n+1}$; et hanc obrem ex factore $1 + 2x$ coſ. A. $\frac{2k\pi}{2n+1} + xx$ orietur integralis pars

$$\pm \frac{1}{2n+1} \text{ coſ. A} \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1}\, l\left(1 + 2x \text{ coſ. A.} \frac{2k\pi}{2n+1} + xx\right)$$

$$\mp \frac{2}{2n+1} \text{ ſin. A.} \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} \text{ A tang.} \frac{x \text{ ſin. A.} \frac{2k\pi}{2n+1}}{1 + x \text{ coſ. A.} \frac{2k\pi}{2n+1}}$$

vbi

vbi ſigna ſuperiora valent ſi m fuerit numerus par, inferiora autem ſi m numerus impar. At eſt

$\operatorname{coſ.} A . \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} = \operatorname{coſ.} A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}$ atque

$\operatorname{ſin.} A . \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} = - \operatorname{ſin.} A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}$, vnde cuiusquè partis integralis ex factore denominatoris trinomiali oriunda eſt

$$\pm \frac{1}{2n+1} \operatorname{coſ.} A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1} \, l\left(1+2x \operatorname{coſ.} A . \frac{2k\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{ſin.} A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1} \, A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A . \frac{2k\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{coſ.} A . \frac{2k\pi}{2n+1}}$$

ſucceſſiue ſcilicet loco k ſcribantur omnes numeri integri $1, 2, 3, \ldots \ldots n$; addanturque formae reſultantes, atque ad ſummam addantur inſuper integrale ex factore ſimplici $1+x$ oriundum $\pm \frac{1}{2n+1} l(1+x)$, quo facto habebitur formulae differentialis propoſitae $\frac{x^m dx}{1+x^{2n+1}}$ integrale quaeſitum hoc:

$$\pm \frac{1}{2n+1} l(1+x)$$

$$\pm \frac{1}{2n+1} \operatorname{coſ.} A . \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} \, l\left(1+2x \operatorname{coſ.} A . \frac{2\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{ſin.} A . \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} \, A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A . \frac{2\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{coſ.} A . \frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2n+1} \operatorname{coſ.} A . \frac{4(m+1)\pi}{2n+1} \, l\left(1+2x \operatorname{coſ.} A . \frac{4\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{ſin.} A . \frac{4(m+1)\pi}{2n+1} \, A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{ſin.} A . \frac{4\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{coſ.} A . \frac{4\pi}{2n+1}}$$

$$\pm \frac{2}{2n+1}\cos A.\frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1+2x\cos A.\frac{6\pi}{2n+1}+xx\right) \pm \frac{2}{2n+1}$$

$$\sin A.\frac{6(m+1)\pi}{2n+1} A\,\mathrm{tang}.\frac{x\sin A.\frac{6\pi}{2n+1}}{1+x\cos A.\frac{6\pi}{2n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{2}{2n+1}\cos A.\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1+2x\cos A.\frac{2n\pi}{2n+1}+xx\right) \pm \frac{2}{2n+1}$$

$$\sin A.\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1} A\,\mathrm{tang}.\frac{x\sin A.\frac{2n\pi}{2n+1}}{1+x\cos A.\frac{2n\pi}{2n+1}}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora valent, ſi m fuerit numerus par, inferiora autem ſunt capienda, ſi m ſit numerus impar. Q. E. I.

Exemplum 1.

§. 53. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^3}$ integrale invenire.

Hic eſt $m=0$, et $n=1$, atque $2n+1=3$. Deinde habemus

$$\cos A.\frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \cos A.\frac{2\pi}{3} = \cos A.120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin A.\frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \sin A.\frac{2\pi}{3} = \sin A.120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quoniam igitur ob m numerum parem ſigna ſuperiora valent, erit formulae propoſitae integrale

$$+\frac{1}{3}l(1+x)$$

$$-\frac{1}{6}l(1-x+xx)+\frac{1}{\sqrt{3}}A\,\mathrm{tang}.\frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

vbi conſtantem non adiicimus, quia hoc integrale iam euaneſcit poſito $x=0$.

Exem-

Exemplum. 2.

§. 54. Huius formulae differentialis $\frac{x\,dx}{1+x^3}$ integrale invenire.

Hic eſt $m = 1$ et $n = 1$, ex quo ſigna inferiora valebunt. Erit autem pro hoc caſu:

$$\text{coſ. A.}\ \tfrac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \text{coſ. A.}\ \tfrac{4\pi}{3} = -\text{coſ. A.}\ \tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{coſ. A.}\ \tfrac{2\pi}{2n+1} = \text{coſ. A.}\ \tfrac{2\pi}{3} = -\text{coſ. A.}\ \tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{ſin. A.}\ \tfrac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \text{ſin. A.}\ \tfrac{4\pi}{3} = -\text{ſin. A.}\ \tfrac{\pi}{3} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ſin. A.}\ \tfrac{2\pi}{2n+1} = \text{ſin. A.}\ \tfrac{2\pi}{3} = \text{ſin. A.}\ \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

vnde integrale quaeſitum erit hoc

$$-\tfrac{1}{3}\,l(1+x)$$

$$+\tfrac{1}{6}\,l(1-x+xx) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ \text{A tang.}\ \tfrac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

Corollarium.

§. 55. Huius ergo formulae differentialis $\frac{(1-x)\,dx}{1+x^3}$ integrale erit $\frac{2}{3}\,l(1+x) - \frac{1}{3}\,l(1-x+xx) = \frac{1}{3}\,l\,\frac{1+2x+xx}{1-x+xx}$

Exemplum. 3.

§. 56. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^5}$ integrale invenire.

Hic eſt $m = 0$, ideoque ſigna ſuperiora valent, et $n = 2$, vnde integrale quaeſitum erit:

$$+\tfrac{1}{5}\,l(1+x)$$

$$+\tfrac{1}{5}\ \text{coſ. A.}\ \tfrac{2\pi}{5}\,l(1+2x\,\text{coſ. A.}\ \tfrac{2\pi}{5}+xx) + \tfrac{2}{5}\ \text{ſin. A.}\ \tfrac{2\pi}{5}\ \text{A tang.}\ \frac{x\ \text{ſin. A.}\ \frac{2\pi}{5}}{1+x\,\text{coſ. A.}\ \frac{2\pi}{5}}$$

$$-\tfrac{1}{5}$$

$-\frac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5}\, l(1 - 2x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5} + xx) + \frac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{5}$

$$\text{A tang.}\ \frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{5}}{1 - x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5}}$$

At eſt coſ. A. $\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; ſin. A. $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$; atque coſ. A. $\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et ſin. A. $\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$.

Exemplum. 4.

§. 57. Huius formulae differentialis $\frac{xdx}{1+x^5}$ integrale invenire

Hic eſt $n = 1$, ideoque ſigna inferiora valent, et $n = 2$: ex quo integrale quaeſitum erit,

$$-\frac{1}{5}\, l(1 + x)$$

$+\frac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5}\, l(1 + 2x\,\text{coſ. A.}\frac{2\pi}{5} + xx)\ \frac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{5}$

$$\text{A tang.}\ \frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{2\pi}{5}}{1 + x\,\text{coſ. A}\frac{2\pi}{5}}$$

$-\frac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\frac{2\pi}{5}\, l(1 - 2x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5} + xx) + \frac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\frac{2\pi}{5}$

$$\text{A tang.}\ \frac{x\,\text{ſin. A}\frac{\pi}{5}}{1 - x\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5}}$$

Exemplum. 5.

§. 58. Huius formulae differentialis $\frac{xxdx}{1+x^5}$ integrale invenire.

Hic eſt $n = 2$ et $m = 2$, vnde ſigna ſuperiora valent: ex quo integrale quaeſitum erit

$$+\frac{1}{5}\, l(1 + x)$$

$-\frac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\frac{\pi}{5}\, l(1 + 2x\,\text{coſ. A.}\frac{2\pi}{5} + xx) - \frac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\frac{\pi}{5}.$

$$\text{A tang.}\ \frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{2\pi}{5}}{1 + x\,\text{coſ. A}\frac{2\pi}{5}}$$

+

$$+\tfrac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\,\tfrac{2\pi}{5}\;l\;1-2x\,\text{coſ. A.}\,\tfrac{\pi}{5}+xx)+\tfrac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\,\tfrac{2\pi}{5}.$$
$$\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{\pi}{5}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{5}}$$

Exemplum. 6.

§. 59. Huius formulae differentialis $\frac{x^3dx}{1+x^5}$ integrale invenire.

Hic eſt $n=2$ et $m=3$, vnde ſigna inferiora valent, ex quo integrale quaeſitum erit:

$$-\tfrac{1}{5}\,l(1+x)$$
$$-\tfrac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\,\tfrac{2\pi}{5}\;l(1+2x\,\text{coſ. A}\,\tfrac{2\pi}{5}+xx)+\tfrac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\,\tfrac{2\pi}{5}$$
$$\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{2\pi}{5}}{1+x\,\text{coſ. A.}\,\frac{2\pi}{5}}$$
$$+\tfrac{1}{5}\,\text{coſ. A.}\,\tfrac{\pi}{5}\;l(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\tfrac{\pi}{5}+xx)+\tfrac{2}{5}\,\text{ſin. A.}\,\tfrac{\pi}{5}$$
$$\text{A tang,}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{\pi}{5}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{5}}$$

Problema. 3.

§. 60. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1-x^{2n+1}}$ exiſtente m numero integro minore, quam $2n+1$.

Solutio.

Quia denominator $1-x^{2n+1}$ hic habet vnum factorem ſimplicem realem $1-x$, per quem, diuiſione peracta, reſultat quotus $1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{2n}$ huius factores trinomiales perinde ac in praecedente problemate poterunt inueniri, ex iisque integrale quaeſitum determinari. At ſi rem probe perpendamus, ſolutio praecedentis problema-

blematis ſimul nobis ſuppeditabit ſolutionem praeſentis; nam ſi hic ponamus $x = -y$, habebimus hanc formulam $\frac{-(-y)^m\,dy}{1+y^{2n+1}}$ ſeu $\frac{\mp y^m\,dy}{1+y^{2n+1}}$; vbi ſignum ſuperius valet, ſi m fuerit numerus par, inferius vero, ſi m numerus impar. Huius autem formulae integrale iam inuenimus in ſolutione praecedentis problematis, vbi ſimul hoc commode accedit, vt ſigna illa ambigua tollantur, et vbique idem ſignum $-$ locum habeat: tum vero in illa ſolutione loco x poni oportet $-x$; hincque formulae noſtrae propoſitae integrale erit:

$$-\frac{1}{2n+1}\,l(1-x)$$

$$-\frac{1}{2n+1}\,\text{coſ. A}\,\frac{2(m+1)\pi}{2n+1}\,l\left(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{2\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$
$$\text{ſin. A.}\,\frac{2(m+1)\pi}{2n+1}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{2\pi}{2n+1}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$-\frac{1}{2n+1}\,\text{coſ. A.}\,\frac{4(m+1)\pi}{2n+1}\,l\left(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{4\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$
$$\text{ſin. A.}\,\frac{4(m+1)\pi}{2n+1}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{\pi}{2n+1}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{4\pi}{2n+1}}$$

$$-\frac{1}{2n+1}\,\text{coſ. A.}\,\frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\,l\left(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{6\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$
$$\text{ſin. A.}\,\frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A.}\,\frac{6\pi}{2n+1}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{6\pi}{2n+1}}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{1}{2n+1}\,\text{coſ. A.}\,\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\,l\left(1-2x\,\text{coſ. A.}\,\frac{2n\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$
$$\text{ſin. A.}\,\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\,\text{A tang.}\,\frac{x\,\text{ſin. A}\,\frac{2n\pi}{2n+1}}{1-x\,\text{coſ. A.}\,\frac{2n\pi}{2n+1}}$$

Q. E. I.

Proble-

Problema. 4.

§. 61. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1-x^{2n+2}}$, exiſtente m numero integro minore, quam $2n+2$.

Solutio.

Denominator $1-x^{2n+2}$ duos habet factores reales, nempe $1+x$ et $1-x$, reliqui factores ſimplices omnes ſunt imaginarii. Sit ergo $1+rx$ factor ſimplex Ex eo ſi conſulatur §. 41. orietur $R = \frac{(-r)^{2n-m+2}}{2n+2}$, atque integralis pars ex factore $1+rx$ oriunda erit $= \frac{1}{2n+2}\int\frac{(-r)^{2n-m+2}dx}{1+rx}$.

Sit iam primo $r=+1$, ac factor $1+x$ in integrale dabit hanc partem

$$\frac{1}{2n+2}\int\frac{\pm dx}{1+x} = \pm \frac{1}{2n+2} l(1+x)$$

vbi ſignum ſuperius valet, ſi m fuerit numerus par, inferius ſi m impar. Sit nunc $r=-1$; ac factor $1-x$ in integrale inducet hoc:

$$\frac{1}{2n+2}\int\frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{2n+2} l(1-x).$$

Pro factoribus trinomialibus ſit nobis propoſitus iſte: $1+px+qxx=(1+rx)(1+sx)$, ita vt ſit $r+s=p$ et $rs=pq$. Quare cum ex factore ſimplici $1+rx$ oriatur integralis pars haec: $\frac{1}{2n+2}\int\frac{(-r)^{2n-m+2}dx}{1+rx}$; ex factore compoſito $1+px+qxx=(1+rx)(1+sx)$ orietur pro integrali

$$\int \frac{((-r)^{2n-m+2}+(-s)^{2n-m+2})dx-rs((-r)^{2n-m+1}+(-s)^{2n-m+1})xdx}{(2n+2)(1+px+qxx)}$$

quae formula cum ea, quam in ſolutione problematis 1. habuimus, ita congruit, vt ſi ibi loco $2n$ ponamus $2n+2$, prodeat haec noſtra negatiue ſumta. His conſideratis, ſi ſit Φ arcus circuli, cuius coſinus eſt $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$, ex factore trinomiali $1+px+qxx$ orietur iſta integralis pars:

$$\pm \frac{q^{\frac{2n-m+1}{2}} \text{coſ. A} \frac{(2n-m+1)\Phi}{2n+2}}{} \; l(1+px+qxx) \mp \frac{q^{\frac{2n-m+1}{2}} \text{ſin. A} (2n-m+1)\Phi}{n+1} \text{ A tang.} \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

vbi ſigna ſuperiora valent, ſi m ſit numerus par; inferiora vero, ſi m ſit numerus impar. Supereſt igitur, vt in factores trinomiales denominatoris $1-x^{2n+2}$ inquiramus, ex quibus ob $1-xx$ factorem iam in computum ductum conſtet productum:

$$1+x^2+x^4+x^6+\ldots\ldots+x^{2n}.$$

Haec forma, ſi cum theoremate in ſolutione primi problematis allegato comparetur, erit alternatim $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=1$, etc. At quod ad terminum medium attinet, quem poſuimus mx^n, erit vtique $m=1$, ſi n ſit numerus par; at erit $m=0$ ſi n ſit numerus impar. Quare duo caſus ſunt tractandi, alter quo n eſt numerus par, qui dat hanc aequationem:

$$\text{coſ. A}.n\psi+\text{coſ. A}(n-2)\psi+\text{coſ. A}(n-4)\psi+\ldots\ldots+\text{coſ. A}2\psi+\tfrac{1}{2}=0$$

alter caſus, quo n eſt numerus impar, dat hanc aequationem:

coſ. A.

$$\text{coſ. A}.\,n\psi + \text{coſ. A}\,(n-2)\psi + \text{coſ. A}\,(n-4)\psi + \ldots\ldots + \text{coſ. A}\,\psi = 0$$

ex quibus n diuerſi arcus ψ eruuntur, quorum coſinus bis ſumti praebebunt valores pro p ſubſtituendos in factore generali $1 + px + qxx$, et q ſemper eſt $= 1$ ita vt factor quisque trinomialis ſit futurus

$$1 + 2x\,\text{coſ. A}\,\psi + xx\text{, eſtque } \phi = \psi$$

Sit primo n numerus par, atque aequatio

$$\text{coſ. A}\,n\psi + \text{coſ. A}\,(n-2)\psi + \text{coſ. A}\,(n-4)\psi + \ldots\ldots\ldots + \text{coſ. A}\,2\psi + \tfrac{1}{2} = 0$$

quae eodem modo, quo in ſolutione probl. 2. tractata tandem dabit $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$, atque loco k ſubſtituendo ſucceſſiue numeros 1, 2, 3, etc. .... n; prodibunt n diverſi valores pro ψ ſimulque pro ϕ. Quamobrem caſu quo n eſt numerus par, formulae propoſitae differentialis $\frac{x^m dx}{1 - x^{2n+2}}$ integrale erit

$$\pm \frac{1}{2(n+1)}\, l(1+x) - \frac{1}{2(n+1)}\, l(1-x)$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)}\,\text{coſ. A}.\frac{(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x\,\text{coſ. A}.\frac{\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}\,\text{ſin. A}\frac{(m+1)\pi}{n+1}\,\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A}.\frac{\pi}{n+1}}{1 + x\,\text{coſ. A}\frac{\pi}{n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)}\,\text{coſ. A}.\frac{2(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x\,\text{coſ. A}\frac{2\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}\,\text{ſin. A}\frac{2(m+1)\pi}{n+1}\,\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A}.\frac{2\pi}{n+1}}{1 + x\,\text{coſ. A}\frac{2\pi}{n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \text{coſ.A.} \frac{3(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x\, \text{coſ.A.} \frac{3\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}$$
$$\text{ſin.A} \frac{3(m+1)\pi}{n+1}\, \text{A tang.} \frac{x\, \text{ſin. A} \frac{3\pi}{n+1}}{1 + x\, \text{coſ.A} \frac{3\pi}{n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \text{coſ. A.} \frac{n(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x\, \text{coſ.A.} \frac{n\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}$$
$$\text{ſin. A} \frac{n(m+1)\pi}{n+1}\, \text{A tang.} \frac{x\, \text{ſin. A} \frac{n\pi}{n+1}}{1 + x\, \text{coſ. A} \frac{n\pi}{n+1}}$$

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora valent, ſi m eſt numerus par, inferiora vero ſi m numerus impar.

Ponamus iam n eſſe numerum imparem, atque ad arcuum ψ vel Φ valores inueniendos, reſolui oportet hanc aequationem.

$$\text{coſ.A}\, n\psi + \text{coſ.A}(n-2)\psi + \text{coſ.A}(n-4)\psi + \ldots\ldots + \text{coſ.A.}\, 3\psi + \text{coſ.A}\,\psi = 0$$

Quorum arcuum in progreſſione arithmetica progredientium cum ſit differentia $= 2\psi$, erit $\text{coſ. A}\, n\psi = 2\, \text{coſ. A.}\, 2\psi.\, \text{coſ. A}(n-2)\psi - \text{coſ. A}(n-4)\psi$. Formemus ergo has aequationes:

$$+ \text{coſ.A}\, n\psi + \ldots\ldots\ldots + \text{coſ.A.}\, 5\psi + \text{coſ.A.}\, 3\psi + \text{coſ.A.}\,\psi = 0$$
$$-2\,\text{coſ.A}\, 2\psi\, \text{coſ.A}\, n\psi - 2\,\text{coſ.A.}\, 2\psi.\text{coſ.A}(n-2)\psi - \ldots - 2\,\text{coſ.A}\, 2\psi\, \text{coſ.A.}\, 3\psi - 2\,\text{coſ.A.}\, 2\psi\, \text{coſ.A}\,\psi = 0$$
$$+ \text{coſ.A}\, n\psi + \text{coſ.A}(n-2)\psi + \text{coſ.A}(n-4)\psi + \ldots - \text{coſ.A}\,\psi = 0$$

quarum ſumma dabit hanc aequationem:

$$(1 - 2\,\text{coſ.A.}\, 2\psi)\, \text{coſ.A.}\, n\psi + \text{coſ.A}(n-2)\psi + \text{coſ.A.}\, 3\psi + (1 - 2\,\text{coſ.A.}\, 2\psi)\, \text{coſ.A}\,\psi = 0$$

At eſt $\text{coſ.A.}\, 3\psi = \text{coſ.A}\,\psi\, \text{coſ.A.}\, 2\psi - \text{ſin.A}\,\psi.\, \text{ſin.A.}\, 2\psi$ et $\text{coſ.A}\, 3\psi - 2\,\text{coſ.A}\,\psi\, \text{coſ.A}\, 2\psi = -\text{coſ.A}\,\psi\, \text{coſ.A}\, 2\psi - \text{ſin.A}\,\psi\, \text{ſin.A}\, 2\psi = -\text{coſ.A.}\,\psi$ ex quo erit $\text{coſ.A.}\, 3\psi + (1 - 2\,\text{coſ.A.}\, 2\psi)\, \text{coſ.A}\,\psi = 0$. Deinde eſt $\text{coſ.A}(n-2)\psi = \text{ſin.A.}\, 2\psi\, \text{ſin.A}\, n\psi +$ coſ.

coſ. A 2ψ. coſ. A $n\psi$. Quibus ſubſtitutis habetur haec aequatio:

$$\text{coſ.A}.n\psi + \text{ſin.A}.2\psi.\text{ſin.A}n\psi - \text{coſ.A}.2\psi.\text{coſ.A}.n\psi = 0$$

ſeu

$$\text{coſ. A}.\, n\,\psi = \text{coſ. A}\,(n+2)\,\psi$$

At eſt generaliter coſ. A. $n\psi =$ coſ. A $(2k\pi - n\psi)$ denotante k numerum quemcunque integrum: vnde fit $2k\pi - n\psi = (n+2)\psi$, atque $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$, qui valor quia congruit cum eo, quem caſu praecedente, quo n eſt numerus par, inuenimus. Patet quoque iſto caſu idem proditurum eſſe integrale, quod in caſu praecedente. Quocirca ſiue n ſit numerus par ſiue impar idem prodit integrale, hocque integrale iam caſu praedente exhibuimus: ita vt problemati ex aſſe ſit ſatisfactum. Q. E. I.

Scholion I.

§. 62. Quod ambae aequationes, quas pro arcu ψ determinando inuenimus, cum caſu, quo n eſt numerus par tum quo eſt impar, eosdem plane valores arcus ψ praebeant, etiamſi ipſae aequationes omnino diſcrepant, mirum videri poteſt. Sin autem rem curatius inſpiciamus, reperiemus binas illas aequationes in hac vna contineri:

$$0 = \text{coſ.A}\,n\psi + \text{coſ.A}(n-2)\psi + \text{coſ.A}(n-4)\psi + \ldots + \text{coſ.A}-(n-4)\psi + \text{coſ.A}-(n-2)\psi + \text{coſ.A}-n\psi$$

cum enim coſinus arcuum negatiuorum aequentur coſinibus eorundem arcuum affirmatiue ſumtorum, termini extremi inter ſe ſunt aequales, ideoque eundem terminum duplicatum dabunt, et ſi n ſit numerus vnus, terminus in medio: coſ. A. $0\,\psi = 1$ ſolitarius relinquetur. Quare cum reſolutio huius aequationis pro vtroque caſu valeat, neceſſe eſt

eſt, vt eadem reperiatur expreſſio pro arcu ψ, ſiue n ſit numerus par ſiue impar. Si enim ad modum ſerierum recurrentium ſummam omnium terminorum inueſtigemus, proueniet $o = (1 - 2 \text{coſ.} A. 2\psi) \text{coſ.} A n\psi + \text{coſ.} A (n-2) \psi + (1 - 2 \text{coſ.} A. 2\psi) \text{coſ.} A. -n\psi + \text{coſ.} A. -(n-2)\psi$ hoc eſt ob $\text{coſ.} A. -n\psi = \text{coſ.} A. n\psi$ et $\text{coſ.} A. -(n-2)\psi = \text{coſ.} A. (n-2)\psi$ erit $o = \text{coſ.} A (n-2)\psi - 2 \text{coſ.} A. 2\psi \text{coſ.} A. n\psi + \text{coſ.} A. n\psi$, atque ex lege progreſſionis ob $\text{coſ.} A (n+2)\psi = 2 \text{coſ.} A. 2\psi. \text{coſ.} A n\psi - \text{coſ.} A (n-2)\psi$ erit $\text{coſ.} A (n+2)\psi = \text{coſ.} A n\psi$. At eſt generaliter $\text{coſ.} A. n\psi = \text{coſ.} A (2k\pi - n\psi)$, vnde oritur $2k\pi - n\psi = (n+2)\psi$, hincque $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$; ſiue n ſit numerus affirmatiuus ſiue negatiuus. Adnotari hic conuenit arcum ψ eſſe eiusmodi, vt $2n+2$ vicibus ſumtus det peripheriam totam aliquoties ſumtam, ex quo erit $\text{coſ.} A 2(n+1)\psi = 1$. Quamobrem ſi expreſſionis $1 - x^{2n+2}$ factor ſeu diuiſor fuerit $1 \pm 2x \text{coſ.} A\psi + xx$, arcus ψ ita erit comparatus, vt ſit $1 - \text{coſ.} A (2n+2)\psi = o$, quo ipſo ingens analogia cum expreſſione $1 - x^{2n+2}$ perſpicitur in reliquis caſibus confirmanda. Iſte autem factor $1 + 2x \text{coſ.} A \psi + xx$ non ſolum factores trinomiales formae $1 - x^{2n+2}$ in ſe complectitur, verum etiam ipſos factores ſimplices reales eiusdem formulae nempe $1 + x$ et $1 - x$ indicat: namque vi determinationis eſſe poteſt $\psi = \pi$ et $\psi = 2\pi$; priori caſu fit $\text{coſ.} A\psi = -1$, altero $\text{coſ.} A. \psi = 1$, vnde oriuntur hi factores $1 + 2x + xx$ et $1 - 2x + xx$, qui ſunt quadrata factorum ſimplicium $1 + x$ et $1 - x$. Neque vero diſcrimen inter quadrata et radices ſcrupulum mouere poteſt, cum in logarithmis, ad quos totum negotium refertur, totum diſcrimen in coefficientes cadat,

cadat, quos hic non reſpicimus. Haec vero obſeruatio confirmatur in reliquis formulis adhuc tractatis; nam ſi formae $1 + x^{2n}$ factor ſit $1 + 2x$ coſ. $A\psi + xx$, erit $\psi = \frac{k\pi}{2n}$, denotante k numerum quemcunque imparem; erit ergo $2n\psi = k\pi$ et $1 +$ coſ. $A. 2n\psi = 0$. In problemate ſecundo vidimus, ſi formulae $1 + x^{2n+1}$ factor ſeu diuiſor ſit $1 + 2x$ coſ. $A. \psi + xx$, fore $\psi = \frac{k\pi}{2n+1}$ denotante k numerum parem, ex quo erit $1 +$ coſ. $A (2n+1) \psi = 0$. Atque ex ſolutione problematis 3 colligitur, ſi formae $1 - x^{2n+1}$ factor fuerit $1 - 2x$ coſ. $A \psi + xx$ fore $1 -$ coſ. $A (2n+1) \psi = 0$. Haecque omnia huc redeunt, vt ſi expreſſionis $1 \pm x^k$ diuiſor fuerit $1 \pm 2x$ coſ. $A\psi + xx$ fore $1 \pm$ coſ. $A. k\psi = 0$. In caſu ergo ſigni ſuperioris $+$ arcus ψ valores ſunt $\frac{\pi}{k}$; $\frac{3\pi}{k}$; $\frac{5\pi}{k}$; etc. pro ſigno autem inferiore ſunt $\frac{0\pi}{k}$; $\frac{2\pi}{k}$; $\frac{4\pi}{k}$; $\frac{6\pi}{k}$; etc. Si pro ψ tot capiantur termini, quot k continet vnitates, quilibet factor $1 \pm 2x$ coſ. $A. \psi + xx$ bis occurrunt, exceptis aliquot caſibus, *quibus* eſt coſ. $A \psi$ vel $+1$ vel -1. Ex quo ſequitur $1 \pm x^k$ eſſe productum ex k factoribus huius formae $V(1 \pm 2x$ coſ. $A. \psi + xx)$, tribuendo ipſi ψ ſucceſſiue valores, huius progreſſionis

$$\frac{\pi}{k};\ \frac{3\pi}{k};\ \frac{5\pi}{k};\ \frac{7\pi}{k};\ \ldots\ \frac{(2k-1)\pi}{k}$$

ſi ſignum $+$ valeat, at pro ſigno $-$, hos

$$\frac{0\pi}{k};\ \frac{2\pi}{k};\ \frac{3\pi}{k};\ \frac{6\pi}{k};\ \ldots\ \frac{(2k-2)\pi}{k}.$$

Huius igitur theorematis ope per diuiſionem circuli factores tam ſimplices quam trinomiales formulae $1 \pm x^k$ exhiberi poſſunt: hocque theorema elegantiſſimum Coteſio debetur. Eſt vero $V(1 \pm 2x$ coſ. $A \psi + xx) =$

$\sqrt{((x \pm \text{coſ. A} \, \psi)^2 + (\text{ſin. A} \, \psi)^2)}$; vnde ſatis illa concinna conſtructio geometrica ſponte ſequitur.

Scholion. 2.

§. 63. Inueniri hinc poſſunt per circuli diuiſionem omnes radices huius aequationis $x^k \pm 1 = 0$: hoc eſt omnes numeri ſiue reales ſiue imaginarii, quorum poteſtates exponentis k faciunt vel -1 vel $+1$. Ac primo quidem aequationis $x^k - 1 = 0$ radices inuenientur ex aequatione $xx - 2x \, \text{coſ. A} \, \psi + 1 = 0$ ſubſtituendo loco ψ ſucceſſiue hos numero k arcus:

$\frac{0\pi}{k}$; $\frac{2\pi}{k}$; $\frac{4\pi}{k}$; . . . . $\frac{(2k-2)\pi}{k}$

eritque $x = \text{coſ. A.} \, \psi + \sqrt{-1}, \text{ ſin. A} \, \psi$. Ex quo omnes radices, quarum numerus eſt k, huius aequationis

$$x^k - 1 = 0$$

erunt ſequentes:

$$x = \text{coſ. A.} \tfrac{0\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \text{ ſin. A.} \tfrac{0\pi}{k} = 1$$
$$x = \text{coſ. A.} \tfrac{2\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \text{ ſin. A.} \tfrac{2\pi}{k}$$
$$x = \text{coſ. A.} \tfrac{4\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \text{ ſin. A.} \tfrac{4\pi}{k}$$
$$\vdots$$
$$x = \text{coſ. A.} \tfrac{(2k-2)\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} \text{ ſin. A.} \tfrac{(2k-2)\pi}{k}$$

Harum ergo expreſſionum omnium poteſtates, quarum exponens eſt $= k$, faciunt vnitatem.

Deinde

Deinde aequationis $x^k + 1 = 0$ radices omnes inueniuntur aequatione $xx + 2x \cos. A . \psi + 1 = 0$ ſubſtituendo ψ ſucceſſiue hos arcus numero k; qui ſunt:

$\frac{3\pi}{k}; \frac{5\pi}{k}; \frac{7\pi}{k} \ldots\ldots \frac{(2k-1)\pi}{k}$

adeo $x = -\cos. A . \psi + \frac{1}{\sqrt{-1}} . \sin. A . \psi$.

em omnes radices huius aequationis

$$x^k + 1 = 0$$

ui numerus eſt k erunt ſequentes

$$x = -\cos. A . \frac{\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{\pi}{k}$$

$$x = -\cos. A . \frac{3\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{3\pi}{k}$$

$$x = -\cos. A . \frac{5\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{5\pi}{k}$$

$$\vdots$$

$$x = -\cos. A \frac{(2k-1)\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A \frac{(2k-1)\pi}{k}$$

harumque expreſſionum omnium poteſtates exponentis k faciunt -1.

Problema 5.

§. 64. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1 + 2bx^n + x^{2n}}$ exiſtente m numero integro minore quam $2n$, et $bb < 1$.

Solutio.

Quia eſt $bb < 1$ denominator $1 + 2bx^n + x^{2n}$ factorem ſimplicem realem non habebit: quare is in factores trinomiales reſolui debet. Sit factor trinomialis $1 + px + qxx$ qui ſit productum ex his duobus ſimplicibus imaginariis

nariis $(1+rx)(1+sx)$. Quaeratur ergo integralis pars ex vtroque factore ſimplici $1+rx$ et $1+sx$ oriund ſecundum praecepta §. 28. Hunc in finem erit numerator $P=x^m$ et denominator $Q=1+2bx^n+x^{2n}$, vnde $\frac{dQ}{dx}=2nbx^{n-1}+2nx^{2n-1}$. Ex his fit propter $p=r$ vel s illo loco:

$$V=\frac{x^m p}{2n(bx^{n-1}+x^{2n-1})}=\frac{r(-\frac{1}{r})^m}{2n(b(-\frac{1}{r})^{n-1}+(-\frac{1}{r})^{2n-1})}$$

ſeu $V=\frac{-(-r)^{2n-m}}{2n+2nb(-r)^n}$. Atque ex factore $1+px+qxx=(1+rx)(1+sx)$ naſcitur integralis pars haec

$$\frac{-(-r)^{2n-m}}{2n(1+b(-r)^n)}\int\frac{dx}{1+rx}\cdot\frac{-(-s)^{2n-m}}{2n(1+b(-s)^n)}\int\frac{dx}{1+sx}$$

ſeu

$$\int\frac{-((-r)^{2n-m}\mp(-s)^{2n-m}\mp bq^n(-r)^{n-m}\mp bq^n(-s)^{n-m})\,dx+(q(-r)^{2n-m-1}\mp q(-s)^{2n-m-1}\mp bq^{n+1}(-r)^{n-m-1}\mp bq^{n+1}(-s)^{n-m-1})\,xdx}{2n(1+b(-r)^n+b(-s)^n+bbq^n)(1+px+qxx)}$$

At eſt $(-r)^k+(-s)^k=\pm r^k\pm s^k$ vbi ſigna ſuperiora valent, ſi ſit k numerus par, inferiora, ſi ſit impar., Hinc ad eundem modum, quo in ſolutione problematis primi, poſito Φ arcu circuli, cuius coſinus $=\frac{p}{2\sqrt{q}}$; erit $(-r)^k+(-s)^k=\pm 2q^{\frac{k}{2}}\,\text{coſ. A.}\,k\Phi=2q^{\frac{k}{2}}\,\text{coſ. A}\,k(\pi-\Phi)$. Hinc facta ſubſtitutione erit integrale ex factore $1+px+qxx$, oriundum.

ſ(−

$$\frac{\int\left(-2q^{\frac{2n-m}{2}}\,\text{coſ.A}\,(2n-m)(\pi-\Phi)-2bq^{\frac{3n-m}{2}}\,\text{coſ.A}\,(n-m)(\pi-\Phi)\right)dx \atop \int+\left(2q^{\frac{2n-m+1}{2}}\,\text{coſ.A}\,(2n-m-1)(\pi-\Phi)+2bq^{\frac{3n-m+1}{2}}\,\text{coſ.A}\,(n-m-1)(\pi-\Phi)\right)xdx}{2n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\,\text{coſ.A}\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)(1+px+qxx)}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{+q^{\frac{2n-m-1}{2}}\,\text{coſ.A}\,(2n-m-1)(\pi-\Phi)+bq^{\frac{3n-m-1}{2}}\,\text{coſ.A}\,(n-m-1)(\pi-\Phi)}{2n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\,\text{coſ.A}.\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)}\,l(1+px+qxx)$$

$$\frac{+q^{\frac{2n-m-1}{2}}\,\text{ſin.A}\,(2n-m-1)(\pi-\Phi)+bq^{\frac{3n-m-1}{2}}\,\text{ſin.A}\,(n-m-1)(\pi-\Phi)}{n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\,\text{coſ.A}\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)}\,\text{A tang.}\,\frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+pq}$$

ſupereſt, vt ſingulos factores trinomiales denominatoris inveſtigemus: in quem ſinem theorema in ſolutione primi problematis adhibitum huc transferamus; eritque $m=2b$; et obtinebimus hanc aequationem coſ. A. $n\psi \pm b = 0$, ſignum $+$ valet ſi n ſit numerus par, ſignum $-$ vero ſi n numerus impar. Sit ω arcus cuius coſinus $= \mp b$, nempe $-b$, ſi n ſit numerus par, et $+b$, ſi n ſit impar; eritque coſ. A. $n\psi =$ coſ. A. $\omega =$ coſ. A $(2k\pi - \omega)$, vnde naſcitur $\psi = \frac{2k\pi-\omega}{n}$; cuius n ſunt valores differentes ponendo loco k ſucceſſiue numeros $0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$. Quilibet ergo factor trinomialis denominatoris continetur in hac forma

$$1 + 2x\ \text{coſ.A.}\,\frac{2k\pi-\omega}{n} + xx$$

et huiusmodi factorum numerus erit $= n$, quare, cum hactenus $1 + px + qxx$ pro factore generali aſſumſerimus, erit $q = 1$ et $p = 2 \text{ coſ. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}$, hincque $\Phi = \frac{2k\pi - \omega}{n}$. Integralis ergo quaeſitae pars ex vnoquoque denominatoris factore trinomiali oriunda erit

$$\frac{+ \text{coſ. A.} (2n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right) + b \text{ coſ. A} (n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right)}{2n(1 + 2b \text{ coſ. A} (n\pi + \omega) + bb)}$$

$$l\left(1 + 2x \text{ coſ. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n} + xx\right.$$

$$\frac{+ \text{ſin. A} (2n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right) + b \text{ ſin. A} (n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right)}{n(1 + 2b \text{ coſ. A} (n\pi + \omega) + bb)}$$

$$\text{A tang.} \frac{x \text{ ſin. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}}{1 + x \text{ coſ. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}}$$

Completum ergo integrale obtinebitur, ſi loco k ſucceſſiue numeri $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1)$ ſubſtituantur, atque omnes valores reſultantes in vnam ſummam colligantur: exiſtente $\omega = \text{A coſ.} \mp b$. Scilicet ſi n eſt numerus par, erit $\omega = \text{A coſ.} - b$, et ſi n eſt numerus impar, erit $\omega = \text{A coſ.} + b$. Q. E. I.

Exemplum 1.

§. 65. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1 + 2bx^2 + x^4}$ integrale inuenire, exiſtente $bb < 1$.

Hic eſt $m = 0$, et $n = 2$, vnde ω erit arcus cuius coſinus $= -b$; ſeu, ſi arcus, cuius coſinus $= + b$ ſit ϱ erit $\omega = \pi - \varrho$. Cognito ergo arcu ω, erunt bini denominatoris factores $1 + 2x \text{ coſ. A.} \frac{\omega}{2} + xx$ et $1 - 2x \text{ coſ. A.} \frac{\omega}{2} + xx$, ex quibus naſcetur integrale quaeſitum

— coſ.

$$\frac{-\text{coſ.A.}\frac{3\omega}{2}-b\,\text{coſ.A.}\frac{\omega}{2}}{4(1+2b\,\text{coſ.A.}\omega+bb)}\,l(1+2x\,\text{coſ.A}\tfrac{\omega}{2}+xx)+\frac{\text{ſinA.}\frac{3\omega}{2}+b\,\text{ſinA.}\frac{\omega}{2}}{2(1+2b\,\text{coſA}\omega+bb)}$$
$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\omega}{2}}{1+x\,\text{coſ. A.}\frac{\omega}{2}}$$

$$\frac{+\text{coſ.A.}\frac{3\omega}{2}+b\,\text{coſ.A.}\frac{\omega}{2}}{4(1+2b\,\text{coſ.A}\omega+bb)}\,l(1-2x\,\text{coſ.A}\tfrac{\omega}{2}+xx)+\frac{\text{ſin.A.}\frac{3\omega}{2}+b\,\text{ſin.A.}\frac{\omega}{2}}{2(1+2b\,\text{coſA}\omega+bb)}$$
$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A.}\frac{\omega}{2}}{1-x\,\text{coſ. A.}\frac{\omega}{2}}$$

At cum ſit $\text{coſ.A}\,\omega=-b$ erit $1+2b\,\text{coſ.A}\,\omega+bb=1-bb$, et $\text{coſ.A.}\frac{3\omega}{2}+b\,\text{coſ.A.}\frac{\omega}{2}=-\text{ſin.A}\,\omega.\,\text{ſin.A}\frac{\omega}{2}$, vnde erit integrale quaeſitum

$$\frac{1}{8\,\text{coſ.A.}\frac{\omega}{2}}\,l\,\frac{1+2x\,\text{coſ.A}\frac{\omega}{2}+xx}{1-2x\,\text{coſ.A}\frac{\omega}{2}+xx}+\frac{1}{4\,\text{ſin.A}\frac{\omega}{2}}\,\text{A tang.}\frac{2x\,\text{ſin.A}\frac{\omega}{2}}{1-xx}$$

Scholion.

§. 66. Ex hoc exemplo videmus generaliter eſſe $1+2b\,\text{coſ.A}(n\pi+\omega)+bb=1-bb=\text{ſin. A}\,\omega\,\text{ſin. A}\,\omega$ nam ſi n ſit numerus par, erit $\text{coſ.A}(n\pi+\omega)=\text{coſ.A}\,\omega=-b$; et, ſi n ſit numerus impar, erit $\text{coſ.A}(n\pi+\omega)=-\text{coſ.A}\,\omega=-b$. Deinde etiam numeratores in genere compendioſius exprimere poterimus. Si enim n ſit numerus par, quo caſu eſt $b=-\text{coſ.A}\,\omega$ erit $\text{coſ.A}\,n\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=\text{coſ.A}\,\omega$, et $\text{coſ.A}(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=\text{coſ.A}\,\omega\,\text{coſ.A}(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right.-\text{ſin. A}\,\omega.\text{ſin. A}(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right.$ atque $\text{ſin A}(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=\text{ſin. A}\,\omega.\text{coſ A}(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)+\text{coſ.A}\,\omega.\,\text{ſin. A}(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$.

Caſu

Caſu ergo, quo n eſt numerus par, erit forma integralis:

$$\frac{-\text{ſin.}\,A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{2n\,\text{ſin.}\,A.\,\omega}\,l\left(1+2x\,\text{coſ}\,A.\tfrac{2k\pi-\omega}{n}+xx\right)+\frac{\text{coſ}\,A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{n\,\text{ſin.}\,A\,\omega}$$

$$A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin.}\,A.\,\frac{2k\pi-\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ.}\,A\,\frac{2k\pi-\omega}{n}}$$

Sit iam n numerus impar, erit $b=\text{coſ.}\,A\,\omega$, et coſ. A $((n-2k)\pi+\omega)=-\text{coſ.}\,A.\,\omega$; ſin. A $((n-2k)\pi+\omega)=-\text{ſin}A.\omega$ ex his oritur coſ. A $(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=-b\,\text{coſ.}\,A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)+\text{ſin.}\,A\,\omega.\,\text{ſin.}\,A\,(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$; parique modo ſin. A $(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=-\text{ſin.}\,A\,\omega.\,\text{coſ.}\,A\,(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)-\text{coſ.}\,A\,\omega.\,\text{ſin.}\,A\,(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$, ex quo caſu quo n eſt numerus impar, erit integralis forma

$$\frac{+\text{ſin}A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{2n\,\text{ſin.}\,A.\,\omega}\,l\left(1+2x\,\text{coſ}A\tfrac{2k\pi-\omega}{n}+xx\right)-\frac{\text{coſ}A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{n\,\text{ſin.}\,A.\,\omega}$$

$$A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin.}\,A.\,\frac{2k\pi-\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ.}\,A\,\frac{2k\pi-\omega}{n}}$$

quae duae expreſſiones vtique multo ſunt ſimpliciores ea, quae in ſolutione prodiit.

Exemplum 2.

§. 67. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+2bx^3+x^6}$ integrale inuenire, exiſtente $bb<1$.

Hic eſt $m=0$, $n=3$, ideoque forma ſcholii poſterior valet, et erit $\omega=A\,\text{coſ.}\,b$, hinc erit integrale quaeſitum.

$$\frac{+\text{ſin.}\,A.\,\frac{2}{3}\omega}{6\,\text{ſin.}\,A.\,\omega}\,l\left(1+2x\,\text{coſ.}\,A.\,\tfrac{\omega}{3}+xx\right)+\frac{\text{coſ.}\,A\,\frac{2}{3}\omega}{3\,\text{ſin.}\,A.\,\omega}\,A\,\text{tang}\frac{x\,\text{ſin.}\,A.\,\frac{\omega}{3}}{1+x\,\text{coſ}A\frac{\omega}{3}}$$

+ ſin.

$$+\frac{\text{ſin. A}.\frac{2}{3}(\pi+\omega)}{6\,\text{ſin. A}.\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ.A}\tfrac{2\pi-\omega}{3}+xx)-\frac{\text{coſ.A}.\frac{2}{3}(\pi+\omega)}{3\,\text{ſin. A}\,\omega}\,\text{A tang}.\frac{x\,\text{ſin.A}.\frac{2\pi-\omega}{3}}{1+x\,\text{coſ. A}.\frac{2\pi-\omega}{3}}$$

$$-\frac{\text{ſin. A}.\frac{2}{3}(\pi-\omega)}{6\,\text{ſin. A}.\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ.A}\tfrac{2\pi+\omega}{3}+xx)+\frac{\text{coſ.A}.\frac{2}{3}(\pi-\omega)}{3\,\text{ſin. A}\,\omega,}\,\text{A tang}.\frac{x\,\text{ſin. A}\frac{2\pi+\omega}{3}}{1+x\,\text{coſ. A}.\frac{2\pi+\omega}{3}}$$

Scholion. 2.

§. 68. Formulae illae integrales adhuc commodius exprimi poſſunt, ita vt nunquam arcus negatiui occurrant, Primo nimirum, ſi n ſit numerus par, quo caſu eſt coſ. $\text{A}.\omega=-b$, erit cuiusuis partis integralis haec forma, poſito $n-m-1=i$

$$-\frac{\text{ſin. A}.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{2n\,\text{ſin. A}\,\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ. A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{n}+xx)-\frac{\text{coſ. A}\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{n\,\text{ſin. A}\,\omega}\,\text{A tang}.\frac{x\,\text{ſin. A}.\frac{2k\pi+\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ. A}.\frac{2k\pi+\omega}{n}}$$

Altero autem caſu quo eſt n numerus impar et coſ. $\text{A}.\omega=+b$, poſito iterum $n-m-1=i$ erit integralis portio quaecunque:

$$+\frac{\text{ſin. A}.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{2n\,\text{ſin. A}.\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ.A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{n}+xx)+\frac{\text{coſ.A}.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{n\,\text{ſin. A}.\omega}\,\text{A tang}.\frac{x\,\text{ſin.A}.\frac{2k\pi+\omega}{n}}{1+x\,\text{coſ.A}.\frac{2k\pi+\omega}{n}}$$

In vtroque caſu integrale conſtabit ex n huiusmodi partibus, quae obtinentur, ſi loco k ſucceſſiue ſubſtituantur nu-

meri, 0, 1, 2, 3, ... $(n-1)$. Praeterea hic notandum eſt, ſi ſit i numerus par, fore

$$\text{ſin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = \text{ſin. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega) \quad \text{et}$$
$$\text{coſ. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = \text{coſ. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega).$$

Quodſi autem fuerit i numerus impar, erit

$$\text{ſin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\,\text{ſin. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega) \quad \text{et}$$
$$\text{coſ. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\,\text{coſ. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega).$$

Exemplum 3.

§. 69. Huius formulae differentialis $\frac{xxdx}{1+2bx^4+x^8}$ integrale inuenire, exiſtente $bb < 1$.

Erit hic $m=2$, et $n=4$, ex quo formula priori erit utendum. Sit igitur ω arcus, cuius coſinus $=-b$; et quia $n-m-1=i=1$, numero impari, erit

$$\text{ſin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\,\text{ſin. A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{4} \quad \text{et}$$
$$\text{coſ. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\,\text{coſ. A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{4}$$

Hanc obrem formulae propoſitae integrale reperietur ſequenti modo expreſſum:

$$\frac{+\,\text{ſin. A}.\frac{\omega}{4}}{8\,\text{ſin. A}.\,\omega}\, l(1+2x\,\text{coſ. A}.\tfrac{\omega}{4}+xx) + \frac{\text{coſ. A}.\frac{\omega}{4}}{4\,\text{ſin. A}\,\omega}\,\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A}.\frac{\omega}{4}}{1+x\,\text{coſ. A}\frac{\omega}{4}}$$

$$\frac{+\,\text{ſin. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{8\,\text{ſin. A}.\,\omega}\, l(1+2x\,\text{coſ. A}\tfrac{2\pi+\omega}{4}+xx) + \frac{\text{coſ. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{4\,\text{ſin. A}\,\omega}\,\text{A tang.}\frac{x\,\text{ſin. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{1+x\,\text{coſ. A}\frac{2\pi+\omega}{4}}$$

+ ſin.

$$+\frac{\text{ſin.}\,A.\frac{4\pi+\omega}{4}}{8\,\text{ſin.}\,A\,\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ.}\,A.\tfrac{4\pi+\omega}{4}+xx)+\frac{\text{coſ.}\,A.\frac{4\pi+\omega}{4}}{4\,\text{ſin.}\,A\,\omega}$$

$$A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin.}\,A.\frac{4\pi+\omega}{4}}{1+x\,\text{coſ.}\,A\frac{4\pi+\omega}{4}}$$

$$+\frac{\text{ſin.}\,A.\frac{6\pi+\omega}{4}}{8\,\text{ſin.}\,A\,\omega}\,l(1+2x\,\text{coſ.}\,A\tfrac{6\pi+\omega}{4}+xx)+\frac{\text{coſ.}\,A.\frac{6\pi+\omega}{4}}{4\,\text{ſin.}\,A\,\omega}.$$

$$A\,\text{tang.}\frac{x\,\text{ſin.}\,A.\frac{6\pi+\omega}{4}}{1+x\,\text{coſ.}\,A\frac{6\pi+\omega}{4}}$$

Scholion 3.

§. 70. Si in formula differentiali propoſita $\frac{x^m dx}{1+2bx^n+x^{2n}}$ foret $bb>1$, tum integratio per problemata praecedentia abſolui poterit. Namque hoc caſu denominator in hos duos factores reales $1+x^n(b+\sqrt{(bb-1)})$ et $1+x^n(b-\sqrt{(bb-1)})$ reſoluitur, ex quo ipſa formula differentialis propoſita diſtribui poterit in binas formulas, quarum denominatores erunt hi duo factores, atque hancobrem earum iutegralia reperiri poterunt per praecepta ante tradita. Idem praeſtari poterit, ſi formula differentialis propoſita fuerit $\frac{x^m dx}{1+2bx^n-x^{2n}}$, quippe quo caſu denominator pariter reſolui poterit in duos factores reales, cuiusmodi ante tractauimus.

DE SVPERFICIE CYLINDRI ET CONI SCALENORVM.

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§ 1.

Occaſionem ſoluendorum horum duorum problematum praebuit mihi Celeb. Dn. Prof. *Heinſius*, qui ea, ſibi in ſolertiſſima doctrinae proiectionum aſtronomicarum indagatione oblata, concinne admodum, methodo tamen a ſequente diuerſa, explicuit. Cum itaque viderem, rariores inueniri vtriusque horum problematum conſtructiones; atque *Andr. Tacquetum* in geometriae practicae lib. III. probl. 2, et 4, (*) fateri, *nondum inuentam eſſe rationem metiendi ſuperficiem cylindri ſcaleni, multo minus elliptici et aliorum; et pariter, quod attineat ad ſuperficiem coni ſcaleni, nondum repertam eſſe rationem, qua reuocari ad menſuram poſſit*; cuius nimirum aetate calculi *leibnitiani* nondum detecti erant, quorum beneficio haec hodie problemata tractari poſſunt; vtilem tamen eſſe immo neceſſariam ſcientiis aſtronomicis et geographicis hanc inueſtigationem. Elaboraui, vt calculorum ſublimiorum ope eam eruerem; quam, qualem inueni, *Academiae* examini atque iudicio ſubmitto.

Tab. I. fig. 1. §. 2. Sit propoſiti ſemicylindri baſis inferior ſemicirculus FEG; diameter inferioris AI, retrorſum producta in B; diameter vero baſeos ſuperioris FG. Capiantur pro lubitu

(*) Cap. XVIII.

lubitu arcus aequales A M, et F E, coniunganturque puncta M, E; erit M E latus cylindri: cui adiungatur aliud infinite vicinum, parallelum, *m e*; eritque ſic parallelogrammulum M *m e* E elementum ſuperficiei cylindricae ſcalenae, cuius areola eſt inueſtiganda. In M *m* prolongatam vtrinque, donec diametro A I occurrat in B, hoc eſt, in tangentem puncti M, demittatur ex E perpendiculum E C: erit ergo areola quaeſita $=$ M *m* $\times$ E C. Eſt autem M *m* elementum circuli, reſpondens adplicatae P M; reſtat igitur indaganda ſola E C, perpendicularis ex E in tangentem circuli M C.

§. 3. Haec E C vt commode determinetur, ducatur M D parallela diametro A I, et demittatur ex E perpendicularis in planum baſeos inferioris, quae neceſſario cadet in punctum aliquod rectae M D; quod punctum itaque ſit D, ita, vt ducta recta C D, anguli M D E et C D E ſint recti. Dico iam, angulum in plano baſeos inferioris iacentem M C D etiam eſſe rectum. Quoniam enim duae rectae M D et C D, in plano inferiori ductae, angulos rectos faciunt cum vnica D E, quae erecta eſt in plano C D E ſurſum protenſo ex communi puncto D: patet, plana triaugularia M C D et C D E ſibi mutuo ad angulos rectos inſiſtere. Cum itaque recta M C faciat angulum rectum cum C E, ex hypotheſi: faciet ea angulos rectos cum omnibus reliquis lineis ex puncto C, in plano C D E ductis; ergo etiam cum C D; quare M C D eſt angulus rectus.

§. 4. His ita praemiſſis non difficile erit menſuram rectae E C, perpendicularis ad tangentem M C, exhibere. Sint enim, poſito K centro baſeos, K P $= x$; P M

 $= y$

$=y$; KM, radius circuli $=r$; DE, altitudo cylindri ſcaleni $= a$; ME, latus huius cylindri, $= b$; MD$=$ $\sqrt{(b^2 - a^2} = c$. Atque erunt, ob parallelas BI et MD, anguli MBP et CMD aequales; adeoqne, ob rectum MCD, (§. 3.) erit CDM$=$BMP$=$PKM. Eſt autem, poſito ſinu toto $=1$, ſinus PKM$= \frac{PM}{MK} = \frac{y}{r}$; vnde in triangulo rectangulo MCD dabitur haec analogia, ſin. MCD(1): MD$(c)=$ ſin. CDM$(\frac{y}{r})$: MC$(\frac{cy}{r})$; erit igitur EC$=\sqrt{(ME^2 - MC^2)} = \frac{\sqrt{(b^2r^2 - c^2y^2)}}{r}$. Cum autem ex natura circuli ſit $Mm = \frac{rdy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$: erit elementum MmeE $= Mm \times EC = \frac{dy\sqrt{(b^2r^2 - c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = dS$, poſita ſuperficie AMEF$=$S.

fig. 2. §. 5. Quod ergo elementum vt integretur, deſcribatur ellipſis ADB, cuius ſemiaxis maior AC$=r$, ſemiaxis minor DC$=\frac{ar}{b}$, CE$=y$, EF$=t$; eritque ex natura ellipſeos $t^2 : \frac{a^2r^2}{b^2} = r^2 - y^2 : r^2$, vnde $t^2 = \frac{a^2r^2 - a^2y^2}{b^2}$, et $Ff = \frac{dy\sqrt{(b^2r^2 - c^2y^2)}}{b\sqrt{(r^2 - y_2)}}$; aut $b \times Ff = \frac{dy\sqrt{(b^2r^2 - c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = dS$, (§. 4.) ſubſtituto nempe c^2 pro $b^2 - a^2$; oritur ergo aequatio finalis haec $b.Ff = dS$; quae integrata praebet $b \times$ DF$=$S; quia autem poſito arcu DF$=0$, fit $y=0$, et conſequenter etiam S$=0$, hinc conſtante in hac integratione adiicienda opus non eſt.

fig. 1. §. 6. Hinc igitur emergit ſequens conſtructio inueniendae ſuperficiei cylindri ſcaleni, demtis baſibus circularibus, quod hucusque ſemper fuit intelligendum. Ex centro baſeos ſuperioris O propoſiti cylindri ſcaleni demittatur perpendicularis OQ in planum baſeos inferioris; punctum Q et centrum baſeos inferioris K coniungatur recta QK, quae eousque in directum prolongetur, donec cylindri la-

tus

tus aliquod AF in A ſecuerit; atque ex termino diametri I in hoc latus ſectum AF demittatur perpendicularis IN. Tum circa axem maiorem $AB = AI$, et axem fig. 2. et 1.
minorem $DG = IN$, deſcribatur ellipſis ADBG, in qua capiatur $CE = PM$, atque erigatur ad CE perpendicularis EF. Quibus peractis, erit ſuperficies cylindri AFME = rectangulo ex latere cylindri AF in arcum ellipſeos DF; vnde manifeſtum eſt, cylindri ſcaleni ſuperficiem dependere a rectificatione ellipſeos.

§. 7. Sed idem hoc facilius etiam ſequenti modo fig. 3.
oſtenditur. Secetur cylindrus obliquus DCIFEG ita, vt noua ſectio NMI ſit normalis plano DIFE, et axis NI perpendicularis ad latus cylindri DH; eritque haec ſectio ellipſis NMI, cuius axis maior DI, minor autem NI. Nam ſi in noua hac ſectione pro ſemiapplicata quauis PM ſit ſectio baſi parallela AMB; habebitur, quia baſis circularis eſt, $AP \times PB = PM^2$; ſed ob triangula ſimilia eſt $AP : PN = PB : PI$, vnde $PB = \frac{AP \times PI}{PN}$, quod ſubſtitutum in priori aequatione efficit hanc $\frac{AP^2 \times PI}{PN} = PM^2$; ſed habetur quoque $AP : PN = DI : NI$, aut vero $AP^2 = \frac{PN.^2 DI^2}{NI^2}$, quod denuo ſubrogatum in hac aequatione vltima praebet hanc $\frac{DI^2 \times PN \times PI}{NI^2} = PM^2$; vel $PM^2 : PN.PI = DI^2 : NI^2$; quod indicat, ſectionem NMI eſſe ellipſin, in qua axis ipſi PM parallelus eſt aequalis ipſi DI, et alter axis aequalis ipſi NI; ſed apparet, eſſe $DI > NI$: ergo NMI eſt ellipſis, cuius axis minor eſt NI. Eſt igitur cylindrus ex hac noua ſectione ortus HFIMN ellipticus, ob baſin NMI ellipticam, ſed eſt cylindrus rectus, cuius quippe latera perpendicularia ſunt ad hanc baſin cylindri-

lindricam; igitur ſuperficiei pars quaecunque HKMN aequalis eſt arcui elliptico NM ducto in latus HN. At vero, ob vngulas NICD et HFGE ſimiles et aequales, area HKMN cylindri recti ſed elliptici eadem eſt cum area correſpondente E*em*D cylindri obliqui ſed circularis: vnde patet, etiam aream E*em*D aequalem eſſe priori facto, et pendere conſequenter ab ellipſeos rectificatione. Quod mirum eſt, cur non deprehenderint acuti geometrae ſuperioris aetatis; cum ex *Sereni Antiſſenſis* meditatione iam cognitum diu ſit, ſectionem cylindri circularis obliquam efficere ellipſin.

§. 8. Sit nunc ſimili modo ſemiconus ſcalenus AEI, cuius baſis ſemicirculus AMI, in qua diameter AI vtrinque prolongata in B et D. Sit autem in hoc cono triangulum per axem AEI tale, vt demiſſa ex vertice coni E perpendicularis ED in baſin cadat in diametri prolongatae punctum D. Capiatur arcus quilibet AM, et ducatur latus coni ME, cum alio infinite vicino *m* E, eritque triangulum M*m*E elementum ſuperficiei conicae ſcalenae, cuius proinde areola inueſtiganda. In M*m* prolongatam vtrinque, donec diametro baſeos occurrat in B, hoc eſt in tangentem puncti M, demittatur ex E perpendiculum EC; erit ergo aereola quaeſita $= \frac{Mm \times EC}{2}$. Eſt autem M*m* elementum peripheriae circularis reſpondens ſemiapplicatae PM, reſtat ergo indaganda ſola EC, perpendicularis ex E in tangentem circuli MC.

fig. 4.

§. 9. Haec EC vt commode determinetur, ducantur rectae MD, CD, cum radio baſeos MK; dico iam; angulum in baſi iacentem MCD eſſe rectum. Nam, quia ED eſt perpendicularis ad planum inferius: erunt anguli EDM,

et

et EDC, recti. Cum itaque in plano horizontali duae ſint rectae MD et CD, quae cum vnica DE plani erecti CDE angulos rectos faciunt: erunt haec duo plana EDC et BDC ad ſe inuicem perpendicularia; cum igitur MC ſit perpendicularis ad rectam CE plani CED, (per hyp.) erit eadem etiam perpendicularis ad omnes reliquas in hoc plano ex C eductas, hoc eſt, erit etiam perpendicularis ad CD: quare angulus MCD eſt rectus.

§. 10. Eſt autem ob tangentem BM et radium MK etiam angulus BMK rectus: ergo MK et CD ſunt parallelae et triangula BMK, BCD, ſimilia. Vocatis igitur radio $MK = r$, altitudine coni ſcaleni $ED = a$; recta $KD = b$, $PK = x$, $PM = y$, erit ob triangula ſimilia PKM et MKB analogia haec, $PK(x) : MK(r) = MK(r) : BK(\frac{r^2}{x})$; nec non ob triangula ſimilia BMK et BCD, $BK(\frac{r^2}{x}) : KM(r) = BD(\frac{r^2}{x} + b) : CD(\frac{r^2 + bx}{x})$. Hinc ob angulum rectum CDE erit $CE = \frac{\sqrt{(rr + bx^2 + a^2 r^2)}}{r}$; atque ob $Mm = \frac{-rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$, erit areola trianguli $MmE = \frac{Mm \cdot x \cdot EC}{2} = \frac{-dx\sqrt{(rr + bx^2 + a^2 r^2)}}{2\sqrt{(r^2 - x^2)}}$; integrali deinde hoc ita ſumto, vt id euaneſcat poſito $x = r$.

§. 11. Hoc vero elementum $\frac{-dx\sqrt{(rr + bx^2 + a^2 r^2)}}{2\sqrt{(r^2 - x^2)}}$, vel iſtud, in quod prius hoc facile transmutatur $\frac{-\frac{1}{2} r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \sqrt{(a^2 + \frac{r + bx^2}{r})}$, non poteſt reduci neque ad circuli, neque ad hyperboles quadraturam, quia nulla facta ſubſtitutione rationale reddi poteſt; neque etiam ad rectificationem ellipſeos eſt reducibile. Nulla igitur hactenus alia ratione conſtrui hoc problema poteſt, niſi deſcriptione curvae huius quatuor dimenſionum, in qua ſit $\frac{\sqrt{(rr + bx^2 + a^2 r^a)}}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$

$= t$, a cuius quadratura integratio elementi quaeſiti dependet. Occurrunt de eodem hoc problemate diſſertationes *Leibnitii* atque *Varignonii* in Miſcellaneis Berolinenſibus, Contin. II. quorum hic pro ſolutione curuam dedit dependentem a quadratura circuli, ſed cuius dein curuae rectificatio problemati quaeſito noſtro inſeruit, ſed modo valde prolixo et imperfecto; ille autem quaeſtionis huius reſponſionem dedit ingenioſam quidem, ſed moleſtiſſimam, per rectificationem curuae alicuius deſcriptu valde difficilis, cuius aequatio, ſi ad coordinatas orthogonias reduceretur, ad ingentem numerum dimenſionum aſcenderet.

METHO-

METHODVS FACILIOR ATQVE EXPEDITIOR INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum igitur omnium formularum rationalium integratio (*) per praecepta tradita ſemper abſolui queat, dummodo denominatoris factores ſiue ſimplices ſiue trinomiales habeantur, nihil amplius ad methodum ante expoſitam ſuperaddendum videbatur. Verum tamen hic omnia, quae ante explicuimus, non ſolum modo magis naturali ex propriis fontibus deducemus, verum etiam praecepta ita adornabimus, vt integratio omnium huiusmodi formularum multo facilius atque expeditius perfici queat. Primum enim methodum tam latiſſime patentem, quam facilem aperiemus cuiuscunque denominatoris factores trinomiales inueniendi; dum antea hos factores eruimus ope cuiuspiam theorematis moivraeani, quod tantum valet, quando ſupremae poteſtates variabilis x, iisdem, quibus infimae, coefficientibus ſunt coniunctae: hocque ipſo integrationem ad plurimas alias formulas accommodare poterimus, ad quas prior methodus minus genuina non ſufficit. Deinde inuentis factoribus tam ſimplicibus quam trinomialibus, methodum longe ſimpliciorem ac faciliorem communicabimus ex quolibet factore denominatoris reſpondentem integralis partem determinandi: in quo negotio ante vſi ſumus methodo cum nimis operoſa, tum ex alienis principiis

(*) vid. ſuper. meth. integr.

plis deducta. Tertio methodus, quam hic oſtendemus, ad omnes formulas differentiales erit aeque accommodata, neque vlla opus erit reductione, quemadmodum ante neceſſe erat; vbi primum ex denominatore factores, qui erant poteſtates ipſius x, elicere, atque tum terminum denominatoris abſolutum vnitati aequalem reddere oportebat.

§. 2. Sit igitur propoſita formula differentialis quaecunque $\frac{M}{N}dx$; cuius integrale requiratur: ſintque M et N functiones quaecunque ipſius x, huius formae

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

tam ratione numeri terminorum, quam poteſtatum ipſius x vtcunque comparatae. Ad integrationem iam abſoluendam oportet fractionem $\frac{M}{N}$ in partes ſimpliciores reales reſoluere, quarum denominatores ſint vel binomia $p + qx$, vel trinomia $p + qx + rxx$; quemadmodum ante vidimus. Continebuntur vero etiam in fractione $\frac{M}{N}$ partes integrae, ſi variabilis x in numeratore M totidem pluresue habeat dimenſiones quam in denominatore. Quod ſi ergo fractio $\frac{M}{N}$ in huiusmodi partes ſiue integras ſiue fractas fuerit reſoluta, quaelibet pars per dx multiplicata et integrata dabit integralis quaeſiti partem; atque omnes iſtae integralis partes ex ſingulis partibus, in quas fractio $\frac{M}{N}$ reſoluitur, oriundae iunctim ſumtae praebebunt integrale formulae $\frac{M}{N}dx$ quaeſitum. Totum ergo negotium huc redit, vt fractionis $\frac{M}{N}$ omnes partes ſimplices eruamus ſiue integras ſiue fractas: tum enim ſingulis per dx multiplicatis integratio facili negotio abſoluetur.

§. 3

§. 3. Partes integras autem fractio $\frac{M}{N}$, vti iam monuimus, in ſe complectitur, ſi x totidem pluresue habeat dimenſiones in numeratore M quam in denominatore N. Contra autem ſi x pauciores habeat dimenſiones in numeratore M quam in denominatore N, tum partes integrae in fractione $\frac{M}{N}$ omnino non continentur, hincque conſequenter nullae partes in integrale inducuntur. Ponamus igitur variabilem x in numeratore M non pauciores habere dimenſiones quam in denominatore; tum partes integrae in fractione $\frac{M}{N}$ contentae more conſueto per diviſionem eliciuntur;

Sit enim $\frac{M}{N} = \frac{Ax^{n+m} + Bx^{n+m-1} + Cx^{n+m-2} + Dx^{n+m-3} + \text{etc}}{\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.}}$

manifeſtum eſt partem integram ex diuiſione oriundam huiusmodi formam eſſe habituram

$\mathfrak{A} x^{m} + \mathfrak{B} x^{m-1} + \mathfrak{C} x^{m-2} + \mathfrak{D} x^{m-3} + \ldots + \mathfrak{M}$

ad cuius coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. inueniendos hoc tantum requiritur, vt iſta pars integra per denominatorem $\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} +$ etc. multiplicetur, et termini omnes, quibus exponens ipſius x non minor eſt quam n, terminis reſpondentibus numeratoris aequentur. Tum igitur orietur

$A = \alpha \mathfrak{A}$

$B = \alpha \mathfrak{B} + \beta \mathfrak{A}$

$C = \alpha \mathfrak{C} + \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{A}$

$D = \alpha \mathfrak{D} + \beta \mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{B} + \delta \mathfrak{A}$

etc.

hincque coefficientes quaeſiti emergent hoc modo

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{\alpha}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\beta A}{\alpha^2}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\beta B}{\alpha^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma) A}{\alpha^3}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\alpha} - \frac{\beta C}{\alpha^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma) B}{\alpha^3} - \frac{(\beta^3 - 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta) A}{\alpha^4}$$

etc.

§. 4. Hoc itaque modo, qui diuiſioni actuali idem omnino praebiturae anteferendus videtur, facili negotio invenitur fractionis $\frac{M}{N}$ pars integra

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \mathfrak{D}x^{m-3} + \ldots\ldots + \mathfrak{M}.$$

definiendis ſcilicet coefficientibus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, etc.
His autem definitis ſimul obtinebitur pars integralis quaeſiti, ex iſta parte integra oriunda, quippe quae erit:

$$\frac{\mathfrak{A}x^{m+1}}{m+1} + \frac{\mathfrak{B}x^m}{m} + \frac{\mathfrak{C}x^{m-1}}{m-1} + \ldots\ldots + \mathfrak{M}x + \mathfrak{N}$$

denotante $\mathfrak{N}$ quantitatem quamcunque conſtantem. Neque vero opus eſt, quemadmodum ante, methodo minus genuina vſi, fecimus, vt ſimul partem fractam, quae cum parte integra inuenta coniuncta totam fractionem propoſitam $\frac{M}{N}$ conſtituat, determinemus; ſed ſufficiet partem integram tantum inueſtigaſſe, ex eaque integralis partem conuenientem eruiſſe. Reliquas enim integralis partes ex partibus fractis fractionis $\frac{M}{N}$ oriundas immediate ex ipſa fractione $\frac{M}{N}$ elicere docebimus, ita vt non opus habeamus illa ſaepenumero laborioſa reductione fractiones $\frac{M}{N}$ ad aliam, in qua variabilis x pauciores obtineat dimenſiones in numeratore M quam in denominatore N; quae tamen reductio

ductio neceſſaria erat viſa in methodo praecedente; vbi praeterea factores ſolitarios denominatoris N formae x^k ſeorſim elicere, atque reliqui denominatoris terminum abſolutum vnitati aequalem efficere coacti fueramus. Methodo autem, quam hic ſumus tradituri, nulla iſtiusmodi praeparatione erit opus.

§. 5. Inuenta parte integra, ſi quae continetur in fractione $\frac{M}{N}$, ex eaque integralis parte conueniente, progrediamur ad partes fractas ſingulas ſimpliciores in fractione $\frac{M}{N}$ contentas eruendas, vt ex his quoque integralis quaeſiti partes oriundae obtineantur. Iſta autem inueſtigatio maximam partem in inuentione factorum ſimpliciorum denominatoris N abſoluitur: qui factores, cum ex inſtituto noſtro, quo totum integrale in forma reali exhibere conſtituimus, debeant eſſe reales, erunt illi vel ſimplices binomiales huius formae $px + qx$, vel trinomiales $p + qx + rxx$, cuiusmodi factores reales ſemper exhiberi poſſe cum docuimus tum in ſequentibus fuſius docebimus, etiamſi factores ſimplices ſint imaginarii. Primum igitur de factoribus ſimplicibus $px + qx$ agemus, qui in denominatore N continentur; inueniuntur hi ex reſolutione aequationis $N = 0$; quod ſi enim huius aequationis radix fuerit inuenta $x = a$, tum ſimul $x - a$ diuiſor erit quantitatis N. Omnia ergo ſubſidia, quae adhuc ſunt inuenta ad radices aequationum algebraicarum eruendas, in praeſenti negotio maximam afferent vtilitatem. Probe autem diſcerni debebunt factores reales ab imaginariis, cum priores ſolos hoc loco in vſum vocemus, poſteriores ſeorſim tractaturi. Ex reſolutione vero aequationum intelligitur, ſi maximus ex-

ponens

ponens ipſius x in N fuerit numerus impar, tum denominatorem N certiſſime vnum eſſe habiturum factorem ſimplicem realem; praeterea vero ſubinde plures habebit, id quod aequationis $N = o$ reſolutio docebit.

§. 6. Sit igitur $p + qx$ factor denominatoris N isque realis; atque ex eo naſcatur fractionis propoſitae $\frac{M}{N}$ iſta pars $\frac{P}{p+qx}$; cuius numeratorem P, quem quantitatem conſtantem eſſe oportet, ſequenti ratiocinio determinabimus. Cum $p + qx$ ſit factor denominatoris N, ſit $\frac{N}{p+qx} = S$; eritque alterius fractionis, quae inſtar complementi cum $\frac{P}{p+qx}$ coniuncta conſtituit fractionem $\frac{M}{N}$, denominator S. Quare ſi a fractione $\frac{M}{N}$ ſeu $\frac{M}{(p+qx)S}$ ſubtrahamus fractionem ſimplicem $\frac{P}{p+qx}$, reſiduae fractionis $\frac{M-PS}{(p+qx)S}$, numerator $M - PS$ diuiſibilis erit per $p + qx$, quo fractio oriatur denominatorem habens S, vti innuimus. Cum igitur quantitas $M - PS$ ſit diuiſibilis per $p + qx$, fiet ea $= o$ ſi ponatur $p + qx = o$ ſiue $x = -\frac{p}{q}$. Subſtituto ergo in M et S vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, erit $M - PS = o$, hincque naſcitur $P = \frac{M}{S}$. Erit itaque numerator ille conſtans aſſumtus $P = \frac{M}{S}$ poſtquam in M et S vbique loco x ſubſtitutum fuerit $-\frac{p}{q}$; quo facto quantitas $\frac{M}{S}$ abibit in quantitatem conſtantem. Ex denominatoris ergo N factore $p + qx$ oritur fractionis $\frac{M}{N}$ pars $\frac{M}{S(p+qx)}$ hincque integralis quaeſiti proueniet pars $\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx} = \frac{M}{Sq}\,l(p+qx)$, ſicque ex ſingulis denominatoris N factoribus ſimplicibus conuenientes integralis partes reperientur.

Exemplum 1.

Exemplum. I.

§. 7. Huius formulae differentialis $\frac{x^3+x^2}{x-1}dx$ integrale inuenire.

Quia hic eſt $\frac{M}{N}=\frac{x^3+x^2}{x-1}$, in hac fractione partes integrae continentur, quae vel per diuiſionem vel modum ante traditum erutae erunt x^2+2x+2 vnde naſcitur haec integralis pars $\frac{x^3}{3}+xx+2x+C$. Deinde cum totus denominator N ex vnico factore $x-1$ conſtet, erit $p=-1$, $q=1$ et $S=\frac{N}{x-1}=1$. Iam ex factore $x-1$ nihilo aequali poſito oritur $x=1$, quo valore in $\frac{M}{S}=x^3+x^2$ ſubſtituto prodit 2, ideoque ex denominatore N obtinetur integralis pars haec $2\int\frac{dx}{x-1}=2\,l(x-1)$. Quoniam vero totum integrale componitur ex partibus, quae tam ex parte integra quam fracta reſultant, erit integrale formulae propoſitae $\frac{x^3+x^2}{x-1}dx$ haec quantitas finita $\frac{x^3}{3}+x^2+2x+C+2\,l(x-1)$ cuius veritas per differentiationem facile comprobatur.

Exemplum. 2.

§. 8. Huius formulae differentialis $\frac{xx+2ax}{aa-xx}dx$ integrale inuenire.

Quia variabilis x in numeratore $xx+2ax$ tot habet dimenſiones, quot in denominatore $aa-xx$ pars integra in fractione $\frac{xx+2ax}{aa-xx}$ continetur, quae per diuiſionem eſt -1, vnde integralis pars naſcitur $-x+C$. Porro denominator $aa-xx$ in factores $(a-x)(a+x)$ reſoluitur; ex priori $a-x$ fit $x=a$, et $\frac{M}{S}=\frac{xx+2ax}{a+x}=\frac{3a}{2}$ poſito $x=a$; vnde integralis pars ex factore $a-x$ oriunda eſt $=\frac{3a}{2}\int\frac{dx}{a-x}=$

 $-\frac{3a}{2}$

$-\frac{3a}{2}l(a-x)$. Ex altero factore $a+x$, qui dat $x=-a$, fit $\frac{M}{S}=\frac{xx+2ax}{a-x}=-\frac{a}{2}$; indeque integralis pars oritur haec $-\frac{a}{2}\int\frac{dx}{a+x}=-\frac{a}{2}l(a+x)$. Integrale ergo quaeſitum repertum eſt $=C-x-\frac{3a}{2}l(a-x)-\frac{a}{2}l(a+x)$

Exemplum 3.

§. 9. Huius formulae differentialis $\frac{xxdx}{(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)}$ integrale inuenire.

Hic variabilis x in numeratore pauciores habet dimenſiones, quam in denominatore; ideoque in hac fractione partes integrae non continentur. Ad denominatoris ergo factores aggredimur, qui ſinguli ſunt ſimplices reales. Primus factor $1-x$ dat $x=1$, et $S=(2-x)(3-x)(4-x)$ hincque $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(2-x)(3-x)(4-x)}=\frac{1}{6}$ poſito $x=1$: ex primo ergo factore $1-x$ naſcitur integralis pars $\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-x}=-\frac{1}{6}l(1-x)$. Secundus factor $2-x$ dat $x=2$, et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(3-x)(4-x)}=-\frac{4}{2}=-2$ poſito $x=2$ hincque naſcitur integralis pars $-2\int\frac{dx}{2-x}=2l(2-x)$. Tertius factor $3-x$ dat $x=3$ et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(2-x)(4-x)}=\frac{9}{2}$ vnde oritur integralis pars $\frac{9}{2}\int\frac{dx}{3-x}=-\frac{9}{2}l(3-x)$. Quartus factor $4-x$ dat $x=4$ et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(2-x)(3-x)}=\frac{16}{3\cdot2\cdot1}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}$; vnde prodit conueniens integralis pars $-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{4-x}=\frac{8}{3}l(4-x)$. Ex his ergo formulae differentialis propoſitae $\frac{xxdx}{(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)}$ integrale colligitur $=C-\frac{1}{6}l(1-x)+2l(2-x)-\frac{9}{2}l(3-x)+\frac{8}{3}l(4-x)$.

§. 10.

§. 10. Ex his igitur exemplis clare intelligitur, quemadmodum propoſitae formulae differentialis, cuius denominator in factores ſimplices reales inter ſe inaequales eſt reſolubilis, integrale inueniri oporteat, ſiue variabilis x in numeratore pauciores ſiue plures habeat dimenſiones quam in denominatore. Huius negotii praecipua pars abſoluitur in coefficientis inueſtigatione per quem formula $\int \frac{dx}{p+qx}$ multiplicari debet, vt integrale ex denominatoris N factore $p+qx$ oriundum obtineatur. Inuenimus autem hunc coefficientem eſſe $\frac{M}{S}$, poſtquam vbique loco x eius valor $-\frac{p}{q}$ quem obtinet ex aequatione $p+qx=0$ fuerit ſubſtitutus. Hunc igitur valorem $-\frac{p}{q}$ loco x tum in M quam in S ſubſtitui oportet. Eſt autem M numerator formulae differentialis propoſitae $\frac{M}{N}dx$, qui perpetuo manet idem, at S pro quouis factore denominatoris $p+qx$ variatur, cum ſit $S=\frac{N}{p+qx}$: ita vt S habeatur, ſi totus denominator N per ſuum factorem $p+qx$ diuidatur. Quodſi ergo denominator N in ſuos factores iam fuerit vel actu reſolutus, vel facile reſolubilis, tum omittendo factorem propoſitum $p+qx$ ſtatim emergit valor litterae S; in quo loco x valorem conſtantem $-\frac{p}{q}$ ſubſtitui oportet: hocque caſu expedite reperitur valor coefficientis $\frac{M}{S}$ ponendo vbique $-\frac{p}{q}$ loco x.

§. 11. Sin autem quotus, qui oritur ex diuiſione denominatoris N per ſuum factorem $p+qx$, fiat admodum prolixus, vel etiam indefinitus, vti ſi fuerit $N=1+x^{50}$ eiusque diuiſor $1+x$, vel ſi ſit $N=1-x^n$ eiusque factor $1-x$: priori enim caſu quotus S conſtaret

ex 99 terminis; poſteriori autem numerus terminorum foret etiam indefinitus n; vnde ſubſtitutio loco x facienda fieret admodum operoſa; neque valor ipſius S, niſi ſummatio ſerierum in ſubſidium vocetur, commode exhiberi poſſet. His igitur caſibus alium modum tradi conueniet, quo expedite valor ipſius S, quem induit poſito $-\frac{p}{q}$ loco x, indicari queat. Cum enim ſit $S = \frac{N}{p+qx}$, quaeritur valor fractionis $\frac{N}{p+qx}$ reſultans, ſi loco x ponatur $-\frac{p}{q}$; hoc autem caſu non ſolum denominator fractionis $\frac{N}{p+qx}$ euaneſcit, ſed etiam numerator N, eo quod ipſe ſit per $p+qx$ diuiſibilis. Quocirca valor fractionis $\frac{N}{p+qx}$ poſito $-\frac{p}{q}$ loco x idem erit ac fractionis huius $\frac{dN}{q\,dx}$ eadem facta ſubſtitutione, quae fractio ex illa oritur differentiando tam numeratorem N quam denominatorem $p+qx$, ſumta x pro variabili. Erit itaque $S = \frac{dN}{q\,dx}$ poſito vbique $-\frac{p}{q}$ loco x: ac totus coefficiens requiſitus $\frac{M}{S}$ erit $\frac{Mq\,dx}{dN}$ poſito vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, vnde pars integralis ex denominatoris N factore $p+qx$ oriunda erit $\frac{Mq\,dx}{dN}\int\frac{dx}{p+qx} = \frac{M\,dx}{dN}\, l(p+qx)$.

§. 12. Compendium hoc inſigni emolumento adhibebitur in inueniendis partibus integralis huiusmodi formularum differentialium $\frac{x^m\,dx}{a^n - b^n x^n}$; ex denominatoris $a^n - b^n x^n$ factoribus. Cum enim denominatoris $a^n - b^n x^n$ factor ſit $a - bx$, fiet ex hoc factore $S = \frac{a^n - b^n x^n}{a - bx}$ exiſtente $M = x^m$ et $N = a^n - b^n x^n$. Facto ergo $x =$

$\overline{b}$ fiet $M = \frac{a^m}{b^m}$ et $S = \frac{-nb^n x^{n-1} dx}{-b\,dx} = n b^{n-1} x^{n-1} = n a^{n-1}$; atque $\frac{M}{S} = \frac{a^{m-n+1}}{n b^m}$, qui valor congruit cum $\frac{Mq\,dx}{dN}$ ſeu $-\frac{Mb\,dx}{dN}$ ob $q = -b$ poſito $x = \frac{a}{b}$; eſt enim $dN = -nb^n x^{n-1} dx$; et $-\frac{Mb\,dx}{dN} = \frac{bx^m}{nb^n x^{n-1}} = \frac{x^{m-n+1}}{nb^{n-1}} = \frac{a^{m-n+1}}{n b^m}$ poſito $x = \frac{a}{b}$. Quocirca ex denominatoris $a^n - b^n x^n$ factore $a - bx$ integralis formulae $\frac{x^m dx}{a^n - b^n x^n}$ naſcetur iſta pars $\frac{a^{m-n+1}}{nb^m}\int\frac{dx}{a-bx} = \frac{-a^{m-n+1}}{nb^{m+1}}$ $l(a-bx)$, quae priori via ſine ſummatione ſerierum inveniri non potuiſſet.

§. 13. Duplicem ergo nacti ſumus viam partem integralis, quae ex denominatoris N factore quocunque ſimplici oritur, aſſignandi. Sit enim in formula differentiali propoſita $\frac{M}{N} dx$ denominatoris N factor ſimplex $p + qx$, erit integralis pars ex hoc factore oriunda vel $\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}$ exiſtente $S = \frac{N}{p+qx}$, vel $\frac{Mq\,dx}{dN}\int\frac{dx}{p+qx}$, poſito in vtroque coefficiente vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, quem valorem x obtinet ex poſito factore $p + qx = 0$. Quouis igitur caſu oblato ea via vti conueniet, quae fuerit facilior atque ad operationem accommodatior: perpetuo enim vtraque via ad eundem coefficientem deducet. Sic in hac formula differentiali $\frac{dx}{1+x-2x^4}$ eſt $M = 1$, et $N = 1 + x - 2x^4$, huiusque denominatoris diuiſor $1 - x$, ita vt ſit $p = 1$,

$q = -1$. Via ergo priori eſt $S = 1 + 2x + 2xx + 2x^3$, et $\frac{M}{S} = \frac{1}{7}$ poſito $x = 1$; vnde integralis pars ex factore $1 - x$ oriunda erit $\frac{1}{7}\int\frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{7}\, l(1-x)$. Via autem poſteriori eſt $dN = dx - 8x^3 dx$, et $\frac{Mqdx}{dN} = \frac{1}{8x^3-1} = \frac{1}{7}$ poſito $x = 1$, prorſus vt ante.

§. 14. Quamquam haec methodus perpetuo tuta nulliſque difficultatibus obnoxia videatur, tamen eius vſus penitus ceſſat, ſi denominator N duos pluresue habeat factores inter ſe aequales. Ponamus enim denominatorem N diuiſibilem eſſe per $(p + qx)^2$; erit coefficiens portionis integralis $\int\frac{dx}{p+qx}$ pro vno factore $p + qx$ vti vidimus $= \frac{M}{S}$ poſito $p + qx = 0$ ſeu $x = -\frac{p}{q}$. Quoniam vero eſt $S = \frac{N}{p+qx}$; erit S etiamnunc per $p + qx$ diuiſibile ideoque facto $x = -\frac{p}{q}$ fiet $S = 0$, hincque coefficiens $\frac{M}{S}$ abibit in infinitum. Vtriusque ergo portionis integralis $\int\frac{dx}{p+qx}$ ex binis factoribus $p + qx$ et $p + qx$ oriundae coefficiens fiet infinitus, alterius quidem affirmatiuus, alterius negatiuus, ita vt integralis portio ex binis coniunctim oriunda ſit differentia inter duo infinita, quam finitam eſſe poſſe ex natura infiniti ſatis liquet. Quanta autem ſit ea differentia, ex alio fonte decidi oportet, quem mox aperiemus.

§. 15. Ponamus igitur fractionis $\frac{M}{N}$ denominatorem N duos habere factores aequales ſeu diuiſibilem eſſe per $(p + qx)^2$, ita vt ſit $N = (p+qx)^2 S$, atque partem fractionis $\frac{M}{N}$, quae ex hoc factore quadrato $(p + qx)^2$ oritur, ſeorſim inueſtigemus. Sit igitur pars iſta $= \frac{A}{p+qx} + \frac{B}{(p+qx)^2}$; ac reliqua pars, quae cum hac fractionem $\frac{M}{N}$ conſti-

conſtituit, ſit $\frac{T}{S}$; vbi A et B quantitates conſtantes, T vero functionem variabilem ipſius x integram denotabit, quam noſſe non opus habemus, ſufficiet enim coefficientes A et B determinaſſe. Cum igitur ſit $\frac{T}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{p+qx} - \frac{B}{(p+qx)^2}$, ob $N = (p+qx)^2 S$ erit $\frac{T}{S} = \frac{M - A(p+qx)S - BS}{(p+qx)^2 S}$ ideoque $T = \frac{M - A(p+qx)S - BS}{(p+qx)^2}$, quae cum quantitas integra eſſe debeat, neceſſe eſt vt quantitas $M - A(p+qx)S - BS$ ſit diuiſibilis per $(p+qx)^2$. Quoniam autem S non amplius per $p+qx$ diuiſibilem eſſe ponimus, eo quod denominatorem N tantum per quadratum $(p+qx)^2$ non vero aliam poteſtatem ſuperiorem diuiſibilem eſſe aſſumimus, neceſſe eſt vt $\frac{M}{S} - A(p+qx) - B$ ſit diuiſibile per $(p+qx)^2$. Ex natura igitur aequationum, cum quantitas $\frac{M}{S} - A(p+qx) - B$ duos habeat factores aequales, oportet, vt tam ipſa, quam eius differentiale $d.\frac{M}{S} - Aqdx$ ſit diuiſibilis per $p+qx$; ergo tam ipſa illa quantitas, quam eius differentiale euaneſcet poſito $p+qx=0$ ſeu $x = -\frac{p}{q}$. Fiat igitur $x = -\frac{p}{q}$; ac prior aequatio dabit $\frac{M}{S} - B = 0$ ſeu $B = \frac{M}{S}$; poſterior vero $A = \frac{d.\frac{M}{S}}{qdx}$. Determinatis ergo coefficientibus A et B, ex formula differentiali $\frac{M}{N}dx$, cuius denominator N factorem habet $(p+qx)^2$, hic ipſe factor praebebit inregralis partem hanc $\frac{d.\frac{M}{S}}{qdx}\int\frac{dx}{p+qx} + \frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^2}$ poſito in coefficientibus vbique $-\frac{p}{q}$ loco x.

§. 16. Si denominator N habeat tres factores aequales ſeu diuiſibilis ſit per $(p+qx)^3$; ex eo orietur eius-

modi

modi pars $\frac{A}{(p+qx)^3} + \frac{B}{(p+qx)^2} + \frac{C}{p+qx}$, quae a fractione $\frac{M}{N}$ ablata relinquet fractionem $\frac{T}{S}$ exiſtente $S = \frac{N}{(p+qx)^3}$. Fiet ergo $T = \frac{M - AS - B(p+qx)S - C(p+qx)^2 S}{(p+qx)^3}$, quae, cum quantitas integra eſſe debeat, oportebit $M - AS - B(p+qx)S - C(p+qx)^2 S$ ſeu $\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2$ diuiſibile eſſe per $(p+qx)^3$: id quod eueniet, ſit et ipſa illa quantitas, et eius differentiale, et eius differentio-differentiale fuerint per $p+qx$ diuiſibilia. Quare ſequentes tres quantitates

$$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2$$
$$d.\frac{M}{S} - Bqdx - 2C(p+qx)qdx$$
$$dd.\frac{M}{S} - 2Cqqdx^2$$

diuiſibiles eſſe oportet per $p+qx$; ideoque ſingulae, ſi in ipſis ponatur $p+qx = 0$ ſeu $x = -\frac{p}{q}$, euaneſcent. Ponatur ergo in ſingulis $x = -\frac{p}{q}$, atque ex prima orietur $A = \frac{M}{S}$; ex ſecunda $B = \frac{1}{qdx} d.\frac{M}{S}$ et ex tertia $C = \frac{1}{2qqdx^2} dd.\frac{M}{S}$. His coefficientibus inuentis ex denominatoris N factore cubico $(p+qx)^3$ orietur ſequens integralis pars

$$\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{(p+qx)^3} + \frac{1}{qdx} d.\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{(p+qx)^2} + \frac{1}{2q^2dx^2} dd.\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{p+qx}$$

poſito in coefficientibus vbique $-\frac{p}{q}$ loco x; ac exiſtente $S = \frac{N}{(p+qx)^3}$.

§. 17. Simili modo ſi ponamus formulae differentialis $\frac{M}{N}dx$ denominatorem N quatuor habere factores aequales ſeu diuiſibilem eſſe per $(p+qx)^4$, ita vt ſit $S = \frac{N}{(p+qx)^4}$ quantitas integra. Quod ſi iam ex hoc factore $(p+qx)^4$ naſci ponatur iſta integralis pars $A\int\frac{dx}{(p+qx)^4} + B\int\frac{dx}{(p+qx)^3}$

$+ C$

$+ C\int\frac{dx}{(p+qx)^2} + D\int\frac{dx}{p+qx}$; oſtendetur pari, quo ante, modo hanc quantitatem

$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3$

diuiſibilem eſſe oportere per $(p+qx)^4$. Hoc autem eveniet ſi praeter hanc ipſam quantitatem eius differentialia primi, ſecundi ac tertii gradus ſingula fuerint diuiſibilia per $p+qx$. Hinc itaque per $p+qx$ diuiſibiles erunt quatuor ſequentes quantitates

$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3$

$d.\frac{M}{S} - Bq\,dx - 2C(p+qx)q\,dx - 3D(p+qx)^2 q\,dx$

$dd.\frac{M}{S} - 2Cqq\,dx^2 - 6D(p+qx)q^2 dx^2$

$d^3.\frac{M}{S} - 6Dq^3 dx^3$.

ſingulae ergo euaneſcent, poſito $x = \frac{-p}{q}$. Facto autem vbique $x = \frac{-p}{q}$, prima aequatio dabit $A = \frac{M}{S}$; ſecunda dabit $B = \frac{1}{q\,dx}\,d.\frac{M}{S}$; tertia dabit $C = \frac{1}{2q^2dx^2}\,dd.\frac{M}{S}$, et quarta dabit $D = \frac{1}{6q^3dx^3}\,d^3.\frac{M}{S}$. Ex his colligitur integralis pars ex denominatoris factore $(p+qx)^4$ oriunda $=$ $\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^4} + \frac{1}{q\,dx}\,d.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^3} + \frac{1}{2q^2dx^2}\,dd.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^2}$ $+ \frac{1}{6q^3dx^3}\,d^3.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}$ poſito in omnibus coefficientibus $x = \frac{-p}{q}$.

§. 18. Facili igitur negotio hos coefficientes determinamus, quos in ſuperiori tractatione per prolixiſſimos calculos eruimus, ac pro altioribus poteſtatibus tantum per inductionem concluſimus; haecque determinatio pro factoribus ſimplicibus cuiuscunque formae valet, cum ſuperior ad hanc tantum formam $1+qx$ eſſet accommodata. Hic

autem vlterius progreſſuri inductione non indigemus; ſi enim denominatoris N factor ſit $(p+qx)^n$; hincque integralis pars oriunda ponatur $= A\int\frac{dx}{(p+qx)^n} + B\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-1}} + C\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-2}} + D\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-3}} +$ etc. ratiocinio ſupra adhibito patebit, poſito $S = \frac{N}{(p+qx)^n}$ per $(p+qx)^n$ diuiſibilem eſſe debere hanc expreſſionem $\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3 - E(p+qx)^4 -$ etc. Tam igitur haec ipſa expreſſio, quam eius differentialia ordinis primi, ſecundi, tertii, etc. vsque ad ordinem $n-1$ incluſiue ſingula per $p+qx$ diuiſibilia eſſe oportet,

$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3 - E(p+qx)^4 -$ etc.
$d.\frac{M}{S} - Bqdx - 2C(p+qx)qdx - 3D(p+qx)^2qdx -$ etc.
$dd.\frac{M}{S} - 2Cq^2dx^2 - 6D(p+qx)q^2dx^2 - 12E(p+qx)^2q^2dx^2 -$ etc.
$d^3.\frac{M}{S} - 6Dq^3dx^3 - 24E(p+qx)q^3dx^3 - 60F(p+qx)q^3dx^3 -$ etc.
$d^4.\frac{M}{S} - 24Eq^4dx^4 - 120F(p+qx)q^4dx^4 -$ etc.
$d^5.\frac{M}{S} - 120Fq^5dx^5 -$ etc.

Quod ſi iam ponatur $p+qx=0$ ſeu $x=\frac{-p}{q}$, ſingulae iſtae expreſſiones euaneſcunt; indeque reperitur

$A = \frac{M}{S}$	$D = \frac{1}{6q^3dx^3}\,d^3.\frac{M}{S}$
$B = \frac{1}{qdx}\,d.\frac{M}{S}$	$E = \frac{1}{24q^4dx^4}\,d^4.\frac{M}{S}$
$C = \frac{1}{2q^2dx^2}\,dd.\frac{M}{S}$	$F = \frac{1}{120q^5dx^5}\,d^5.\frac{M}{S}$

etc.

Ex

Ex his igitur colligitur integralis quaeſiti pars ex denominatoris N factore $(p+qx)^n$ oriunda fore

$$\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^n}+\frac{1}{q\,dx}d.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-1}}+\frac{1}{2q^2dx^2}dd.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-2}}$$

$$+\frac{1}{6q^3dx^3}d^3.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-3}}+\frac{1}{24q^4dx^4}d^4.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-4}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)q^{n-1}dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}$$

exiſtente $S=\frac{N}{(p+qx)^n}$ atque in coefficientibus vbique poſito $x=\frac{-p}{q}$.

Exemplum 4.

§. 19. Huius formulae differentialis $\frac{(1-x)dx}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}$ integrale inuenire.

Hic eſt $M=1-x$ et $N=x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)$ et cum variabilis x in numeratore M pauciores habeat dimenſiones quam in denominatore N, nulla pars integra in fractione $\frac{M}{N}$ continetur, nullaque inde naſcitur integralis pars. Conſideremus ergo factores denominatoris, ac primo quidem x^4, erit $S=(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)$. et $p=0$, atque $q=1$; vnde ponendum erit $x=\frac{-p}{q}=0$. Iam ad coefficientes requiſitos inueniendos erit

$$\frac{M}{S}=\frac{1-x}{(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}=\frac{1}{12}$$

$$d.\frac{M}{S}=\frac{120x^3-288xx+223x-56}{(2x-1)^4(3x-2)^3(4x-3)^2}dx=\frac{7}{9}.dx$$

$$dd.\frac{M}{S}=\frac{-17280x^5+55664x^4-93016x^3+72068x^2-26162x+3758}{(2x-1)^5(3x-2)^4(4x-3)^3}dx^2=\frac{1879}{216}dx^2.$$

$$d^3.\frac{M}{S}=\left(\frac{-26162}{432}+\frac{37580}{432}+\frac{45096}{864}+\frac{45096}{1296}\right)dx^3=\frac{24499}{216}dx^3$$

Hinc ex denominatoris factore x^4 naſcitur integralis pars haec $\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x^4} + \frac{7}{9}\int\frac{dx}{x^3} + \frac{1879}{432}\int\frac{dx}{xx} + \frac{24499}{1296}\int\frac{dx}{x}$ ſeu $C - \frac{1}{36x^3} - \frac{7}{18xx} - \frac{1879}{432x} + \frac{24499}{1296}\,l\,x.$

Sumamus alterum factorem $(2x-1)^3$, quo eſt $q = 2$; $p = -1$; eſt valor pro x ſubſtituendus $= \frac{1}{2}$: deinde eſt $S = x^4(3x-2)^2(4x-3)$ atque coefficientes quaeſiti

$$\frac{M}{S} = \frac{1-x}{x^4(3x-2)^2(4x-3)} = -32.$$

$$\frac{1}{dx}\,d.\frac{M}{S} = \frac{72x^3 - 161x^2 + 112x - 24}{x^5(3x-2)^3(4x-3)^2} = -192.$$

$$\frac{1}{dx^2}\,dd.\frac{M}{S} = -3200.$$

Integralis ergo pars ex factore $(2x-1)^3$ oriunda eſt $-32\int\frac{dx}{(2x-1)^3} - 96\int\frac{dx}{(2x-1)^2} - 400\int\frac{dx}{2x-1}$ ſiue $+\frac{8}{(2x-1)^2} + \frac{48}{2x-1} - 200\,l(2x-1)$

Tertius denominatoris factor $(3x-2)^2$ dat $p = -2$ et $q = 3$, atque $S = x^4(2x-1)^3(4x-3)$ vnde ponendo $x = \frac{2}{3}$ oriuntur coefficientes

$$\frac{M}{S} = \frac{1-x}{x^4(2x-1)^3(4x-3)} = -\frac{2187}{16}$$

$$\frac{1}{dx}\,d.\frac{M}{S} = \frac{+32805}{16}$$

integralis ergo pars ex factore $(3x-2)^2$ oriunda erit $-\frac{2187}{16}\int\frac{dx}{(3x-2)^2} + \frac{10935}{16}\int\frac{dx}{3x-2}$ ſiue

$+\frac{729}{16(3x-2)} + \frac{3645}{16}\,l(3x-2)$

Tandem vltimus factor $4x-3$, dat $x = \frac{3}{4}$ atque $S = x^4(2x-1)^3(3x-2)^2$ vnde erit

$$\frac{M}{S} = \frac{1-x}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2} = \frac{8192}{81}$$

vnde integrale ex hoc factore oriundum erit

$$\frac{8192}{81}\int\frac{dx}{4x-3} = \frac{2048}{81}\,l(4x-3)$$

Formulae

Formulae itaque differentialis propoſitae huius

$$\frac{(1-x)\,dx}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}$$

integrale completum erit:

$$C - \frac{1}{36x^3} - \frac{7}{18xx} - \frac{1879}{432x} + \frac{24499}{1296}\,lx - 200\,l(2x-1) + \frac{3645}{16}\,l(3x-2)$$
$$+ \frac{8}{(2x-1)^2} + \frac{48}{2x-1} + \frac{729}{16(3x-2)} + \frac{2048}{81}\,l(4x-3)$$

§. 20. Conuenit quandoque loco differentiationum ipſius $\frac{M}{S}$ ipſo principio vti, vnde eas deduximus; hocque modo facilius peruenietur ad numeratorem quaeſitum. Scilicet ſi denominatoris N factor fuerit R, ita vt ſit $N = RS$, in fractione $\frac{M}{N}$ ſeu $\frac{M}{RS}$ continebitur fractio ſimplicior $\frac{V}{R}$, ſi ea fuerit ſumma harum $\frac{V}{R} + \frac{T}{S}$. Fiet ergo $M = VS + TR$, vnde oritur $T = \frac{M-VS}{R}$. Quare cum T ſit quantitas integra, pro V eiusmodi quantitatem integram quaeri oportet, vt $M - VS$ diuiſibile fiat per R, quod autem ita effici debet, vt variabilis x, pauciores obtineat dimenſiones in V quam in R. – Haec vero quantitatis V inventio interdum ſine differentiationibus facilius abſoluitur, ſolo ratiocinio. Sit enim pro $\frac{M}{N}$ propoſita iſta fractio

$\frac{1}{x^m(1+x^n)}$, vbi eſt $M = 1$, $R = x^m$, et $S\ 1 + x^n$;

atque ad quaerendam fractionem $\frac{V}{x^m}$ in illa fractione contentam, in cuius numeratore V variabilis x pauciores habeat dimenſiones quam m; oportet pro V eius modi functionem inueſtigare, vt $1 - V(1+x^n)$ fiat diuiſibile per x^m.

 Patet

Patet autem, vt 1 tollatur, eſſe debere $V = 1 + X$, quo ſubſtituto haec quantitas $X + x^n + X x^n$ diuiſibilis eſt reddenda per x^m. Perſpicuum autem eſt ſi fuerit $m \lessdot n$, tum diuiſionem ſuccedere ſi $X = 0$, ideoque caſu $m \lessdot n$ in fractione $\frac{1}{x^m(1+x^n)}$ continetur haec ſimplicior $\frac{1}{x^m}$. Quod ſi autem ſit $m > n$ tum ponatur $X = Y - x^n$, habebiturque $Y - x^{2n} + Y x^n$ diuiſibile per x^m; euenit hoc ſi $m \lessdot 2n$ poſito $Y = 0$; quare ſi $m > n$ et $m \lessdot 2n$, tum erit $X = -x^n$ et $V = 1 - x^n$. Hinc facile conſequimur generatim fractionem $\frac{V}{x^m}$ fore $\frac{1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} - \text{etc.}}{x^m}$ in cuius numeratore tot capiendi ſunt termini, quoad ad exponentem ipſius x maiorem quam m perueniatur. In formula ergo differentiali $\frac{dx}{x^m(1+x^n)}$ ex denominatoris factore x^m haec elicitur integralis pars

$$\int \frac{dx}{x^m} - \int \frac{dx}{x^{m-n}} + \int \frac{dx}{x^{m-2n}} - \int \frac{dx}{x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

eousque continuanda, donec exponentes ipſius x fiant negatiui: iſta autem integralis pars hoc pacto multo facilius reperitur, quam per differentiationes ante indicatas.

§. 21. Expoſuimus igitur modum facilem atque expeditum ex factoribus ſimplicibus denominatoris N in formula differentiali $\frac{M}{N} dx$, ac poteſtatibus eorum, quae quidem in N continentur, partes integralis quaeſiti reſpondentes inueniendi. Totum enim integrale formulae $\frac{M dx}{N}$ componitur ex partibus, quae cum ex quantitatibus

integris

integris in fractione $\frac{M}{N}$ contentis oriuntur, tum ex ſingulis factoribus denominatoris N. Eae quidem integralis partes, quae ex quantitate integra in fractione $\frac{M}{N}$ contenta naſcuntur, ſunt perpetuo quantitates algebraicae; illae autem quae ex factoribus ſimplicibus denominatoris N proficiſcuntur, ſunt quantitates logarithmicae, cum quibus etiam algebraicae coniunguntur, ſi poteſtas cuiuspiam factoris ſimplicis in denominatore N contineatur; hocque caſu ſubinde euenire poteſt, vt in integrali pars logarithmica penitus euaneſcat, ſolaeque quantitates algebraicae ſuperſtites maneant. Quod ſi igitur denominator N omnes factores ſimplices habeat reales, tum integrale formulae differentialis $\frac{M\,dx}{N}$ niſi eſt quantitas algebraica, per logarithmos exhiberi poteſt. Sin autem in denominatore N contineantur factores ſimplices imaginarii, tum quidem per methodum integrandi hic expoſitam perueniretur ad logarithmos imaginarios, quos autem, ſiquidem quantitatem realem prae ſe ferant, ad arcus circulares reduci poſſe conſtat. Supra autem iam obſeruauimus, ſi denominator N habeat factores ſimplices imaginarios, tum eorum numerum ſemper eſſe parem, atque ex iis binos ſemper ita eſſe comparatos, vt eorum productum fiat expreſſio realis. Hanc obrem loco factorum ſimplicium imaginariorum formari poterunt factores trinomiales reales, quorum numerus erit duplo minor, ex hisque factoribus peruenietur ad integralis partes a quadratura circuli pendentes.

§. 22. Praecipuum igitur negotium, ſi denominator N habeat factores ſimplices imaginarios, in hoc verſabitur, vt ipſius denominatoris N factores trinomiales reales exhibeantur

hibeantur, in quibus factores imaginarii contineantur. Sit itaque $p + rx + qxx$ huiusmodi factor trinomialis ipſius N, cuius factores ſimplices ſint imaginarii, erit $4pq > rr$ ſeu $\frac{r}{2\sqrt{pq}} < 1$. Denotabit igitur $\frac{r}{2\sqrt{pq}}$ coſinum cuiuspiam anguli qui ſit Φ, ita vt ſit $\frac{r}{2\sqrt{pq}} = $ coſ. A . Φ et $r = 2\sqrt{pq}$. coſ. A Φ. Quamobrem generalis forma huiusmodi factoris trinomialis erit

$$p - 2x\sqrt{pq}\,.\,\text{coſ. A}\,\Phi + qxx$$

atque ideo in hoc nobis erit elaborandum, vt inueniamus an huiusmodi factores trinomiales in denominatore N contineantur, et quot ſint futuri, et quales. Patet autem in hac forma trinomiali etiam factores ſimplices reales comprehendi, ſi fiat $\Phi = 0$; tum enim ob coſ. A . $\Phi = 1$, erit factor ille trinomialis $= (\sqrt{p} - x\sqrt{q})^2$, indicabitque denominatorem N diuiſibilem eſſe per $\sqrt{p} - x\sqrt{q}$; etſi concludi non poteſt, etiam ipſius quadratum $(\sqrt{p} - x\sqrt{q})^2$ eſſe diuiſorem ipſius N: inueſtigatio enim diuiſorum aequalium ex alio fonte eſt petenda. Quamobrem ſi determinauerimus, quot variis modis expreſſio $p - 2x\sqrt{pq}$. coſ. A $\Phi + qxx$ tanquam factor in denominatore N contineatur, tum ſimul tum omnes factores trinomiales in imaginarios reſolubiles, quam etiam ipſos factores ſimplices reales aſſequemur. Atque hinc etiam, ſi iſta inueſtigatio perpetuo poterit abſolui, intelligetur, quod ſupra iam probauimus, omnes factores ſimplices imaginarios ad factores trinomiales reales reduci poſſe.

§. 23. Ponamus ergo denominatoris N factorem eſſe $p - 2x\sqrt{pq}$. coſ. A $\Phi + qxx$

is

is itaque in ſe complectitur hos binos factores ſimplices imaginarios:

$$x\sqrt{q}-\sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi+\sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi$$
$$x\sqrt{q}-\sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi-\sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi$$

ſi igitur hi factores ſimplices nihilo aequales ponantur, et valores ipſius x inde oriundi in N ſubſtituantur, vtroque caſu valor ipſius N euaneſcet. Fiet autem, valores ipſius x coniunctim exprimendo

$$x=\sqrt{\tfrac{p}{q}}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi\pm\sqrt{-\tfrac{p}{q}}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi.$$

vel ſi ponamus commoditatis gratia $f=\sqrt{\tfrac{p}{q}}$, erit

$$x=f\,\text{coſ.}\,A\Phi\pm f\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi$$

vterque igitur valor ipſius x in N ſubſtitutus ad nihilum perducere debet. Colligitur autem cum ex ipſa operatione inſtituenda, tum ex proprietatibus de multiplicatione arcuum cognitis, ſingulas ipſius x poteſtates ſequenti modo expreſſum iri.

$$x^2=ff\,\text{coſ.}\,A\,.\,2\Phi\pm ff\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,A\,.\,2\Phi$$
$$x^3=f^3\,\text{coſ.}\,A\,.\,3\Phi\pm f^3\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,A\,.\,3\Phi$$
$$x^4=f^4\,\text{coſ.}\,A\,.\,4\Phi\pm f^4\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,A\,.\,4\Phi$$

et generaliter

$$x^k=f^k\,\text{coſ.}\,A\,.\,k\Phi\pm f^k\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,A\,.\,k\Phi$$

Cum igitur loco cuiusuis poteſtatis ipſius x duo tantum termini ſubſtitui debeant, ſubſtitutio vtraque pro vtroque ſignorum ambiguo facile abſoluitur. Quod, quo facilius perſpiciatur, ſcribatur in N primo $f^k\,\text{coſ.}\,A\,.\,k\Phi$ loco cuiusuis poteſtatis x^k, ſitque quod prodit $=$ P; deinde loco x^k

ſcribatur f^k ſin. A. $k\phi$; et quod prodit, ſit $= Q$: atque manifeſtum eſt per ſubſtitutionem

$$x^k = f^k \text{ coſ. A.} k\phi \pm f^k \sqrt{-1}. \text{ ſin. A.} k\phi$$

denominatorem abiturum eſſe in

$$P \pm Q \sqrt{-1}.$$

quae duplex expreſſio cum debeat eſſe $= 0$, erit tam $P = 0$, quam $Q = 0$.

§: 24. Ad valores igitur tam pro p et q quam pro arcu ϕ inueniendos, qui reddat

$$p - 2x\sqrt{pq}. \text{ coſ. A}\phi + qxx$$

factorem denominatoris N, poſito $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$, duplicem nanciſcimur aequationem, primo ſcilicet loco x^k ponendo f^k coſ. A $k\phi$, oritur aequatio $P = 0$; ac deinde loco x^k ponendo f^k ſin. A $k\phi$, orietur altera aequatio $Q = 0$, ex quibus duabus aequationibus tum quantitatem f, quum arcum ϕ determinari oportebit. Hoc autem pluribus modis ſemper praeſtari poterit, tot ſcilicet, quot varios factores tam ſimplices quam trinomiales reales denominator N in ſe complectitur. Simplices quidem prodeunt, ſi $\phi = 0$, quo caſu alter valor Q ſponte fit 0, ob ſin. A. $k\phi = 0$; tum autem erit coſ. A. $k\phi = 1$, ac valor P ex N naſcetur, ponendo ſimpliciter f loco x. Quare, quot iſta aequatio $P = 0$ habebit radices reales, tot prodibunt factores ſimplices reales denominatoris N; ac ſi omnes radices aequationis $P = 0$ fuerint reales, tum vlteriori inveſtigatione non erit opus. Sin autem radices imaginariae contineantur, tum alios quaeri oportet valores pro arcu ϕ, qui aequationibus $P = 0$ et $Q = 0$ ſatisfaciant, hincque con-

conuenienter valores pro f elicientur; atque ſic factores trinomiales obtinentur, factores ſimplices imaginarios complectentes. Vſus autem huius regulae clarius apparebit, ſi eius ope factores trinomiales inueſtigemus denominatorum, quos deinceps in exemplis ſumus tractaturi. Sit igitur primum ſequens propoſita forma, cuius factores reales ſiue ſimplices ſiue trinomiales inueſtigari oporteat

$$\alpha+\beta x^n$$

§. 25. Quia ſubſtitutiones praeſcriptae loco poteſtatum ipſius x ſunt faciendae, terminus abſolutus α ita eſt ſpectandus, quaſi eſſet αx^0. Poſito ergo loco poteſtatis ipſius x generalis x^k tam $f^k \operatorname{coſ}. A\, k\Phi$, quam $f^k \operatorname{ſin}. A.\, k\Phi$, et vtraque expreſſione reſultante facta $=0$, ſequentes duae aequationes habebuntur

$$\alpha+\beta f^n \operatorname{coſ}. A.\, n\Phi=0$$
$$\beta f^n \operatorname{ſin}. A.\, n\Phi=0.$$

Primum igitur poni poteſt $\Phi=0$, quo poſteriori aequationi ſatisfiet, prior vero dabit

$$\alpha+\beta f^n=0 \text{ ſeu } f=\sqrt[n]{-\tfrac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\tfrac{p}{q}}$$

vnde oritur diuiſor ſimplex $\sqrt{p}-x\sqrt{q}$ ſeu $\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{-\beta}$ ſiue $\sqrt[n]{-\frac{\alpha}{\beta}}-x$. Quod ſi ergo ſit n numerus impar, ſemper vnus habetur factor ſimplex realis $\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{-\beta}$. At ſi n ſit numerus par, factor ſimplex realis non dabitur, niſi $\frac{-\alpha}{\beta}$ fuerit quantitas affirmatiua, hoc vero caſu duplex habebitur factor ſimplex realis, nempe $\pm\sqrt[n]{-\frac{\alpha}{\beta}}-x$; ſiue huius expreſſionis $\alpha-\beta x^n$ hi duo erunt factores ſimplices reales $\sqrt[n]{\alpha}+x\sqrt[n]{\beta}$ et $\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{\beta}$, ſi quidem n

eſt numerus par; hi autem caſus per ſe ſunt noti, atque in ſequenti inueſtigatione denuo occurrent.

§. 26. Non igitur ſit $\Phi = 0$, atque aequatio poſterior dabit ſin. $A . n\Phi = 0$: ex quo poſita ſemiperipheria circuli $= \pi$, exiſtente radio $= 1$; erit $n\Phi =$ multiplo cuicunque ſemiperipheriae π, quod ſit $k\pi$, hincque $\Phi = \frac{k\pi}{n}$. Hinc autem fiet coſ. $A\, n\Phi =$ coſ $A\, k\pi = \pm 1$: erit nempe coſ. $A . n\Phi = + 1$, ſi k fuerit numerus par, et coſ. $A . n\Phi = - 1$ ſi k fuerit numerus impar. Subſtituto hoc valore in priori aequatione habebimus $\alpha \pm \beta f^n = 0$. Hinc duos caſus euolui conueniet, prout α et β ſint quantitates vel iisdem ſignis vel diuerſis affectae. Sint primo iisdem ſignis affectae

$$\alpha + \beta x^n$$

atque ſumatur k numerus impar, $2k - 1$, vt ſit $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ et coſ. $A . n\Phi = - 1$, erit $\alpha - \beta f^n = 0$ et $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$; vnde $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$ et $q = \sqrt[n]{\beta^2}$

Formae igitur propoſitae $\alpha + \beta x^n$ habebimus hunc factorem trinomialem generalem:

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x \sqrt[n]{\alpha\beta} . \text{coſ. } A . \frac{(2k-1)\pi}{n} + xx \sqrt[n]{\beta^2}$$

Atque hinc tot factores diuerſi reſultabunt, quot loco k numeris integris ſubſtituendis diuerſi valores pro coſ. $A . \frac{(2k-1)\pi}{n}$ oriuntur. Quod ſi autem loco k ſucceſſiue omnes numeros integros $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ ſubſtituamus, tum quilibet factor trinomialis bis occurret, ſi n fuerit numerus par, ſin autem n fuerit numerus impar, tum in medio ſolitarius factor relinquetur, poſito $2k - 1 = n$; hocque caſu fit coſ. $A . \pi = - 1$; et ex hoc factor ſimplex

plex realis naſcitur $\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$. Factores autem trinomiales obtinentur, ponendo loco $2k-1$ omnes numeros impares minores quam n.

§. 27. Ex his igitur omnes factores tam ſimplices quam trinomiales reales exhiberi poſſunt formae

$$\alpha + \beta x^n$$

ſi enim n ſit numerus par, omnes erunt trinomiales, eorumque numerus $= \frac{n}{2}$: qui erunt

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{(n-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Quod ſi autem n fuerit numerus impar, tum vnus factor erit ſimplex, reliqui trinomiales, horumque numerus $= \frac{n-1}{2}$: omnes autem erunt

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{3\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{5\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A}\,\frac{(n-2)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

vtroque autem caſu factores exhibiti actu in ſe ducti formam propoſitam $\alpha + \beta x^n$ producent.

§. 28. Sint iam quantitates α et β diuerſis ſignis affectae, ſeu quaerantur factores huius expreſſionis

$$\alpha - \beta x^n$$

atque pro k accipi oportebit numerum parem $2k$, ita vt ſit $\phi = \frac{2k\pi}{n}$ et $\alpha - \beta f^n = 0$ ſeu $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$, vnde $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$ et $q = \sqrt[n]{\beta^2}$

Factor igitur trinomialis realis in genere erit

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A}\,.\,\frac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

atque tot erunt huiusmodi factores, quot varii prodibunt valores pro coſ. A. $\frac{2k\pi}{n}$. Omnes autem diuerſi prodibunt valores, ſi pro $2k$ ſubſtituantur omnes numeri pares vsque ad n. Et quidem $a\,0$ loco $2k$ ſubſtituendo oritur factor ſimplex

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

Praeterea vero, ſi n numerus par et fiat $2k = n$, denuo factor ſimplex realis oritur

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}.$$

Quare ſi n fuerit numerus par huius formulae

$$\alpha - \beta x^n$$

ſequentes erunt factores reales ſiue ſimplices ſiue trinomiales:

$$\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A}\,.\,\frac{2\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A}\,.\,\frac{4\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ. A}\,.\,\frac{6\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A\, \tfrac{(n-2)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

Quod ſi autem n fuerit numerus impar, tum formulae

$\alpha - \beta x^n$

factores reales erunt ſequentes:

$$\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A.\, \tfrac{2\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A.\, \tfrac{4\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A.\, \tfrac{6\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A.\, \tfrac{(n-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Atque vtroque caſu productum ex his omnibus factoribus ortum producet formulam $\alpha - \beta x^n$.

§. 29. Ex his perſpicitur, ſi loco k omnes numeri integri ab 1, 2, 3 .... vsque ad n incluſiue ſubſtituantur; tum omnes factores trinomiales ex iſta forma generali reſultantes

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} \,.\, \text{coſ.}\, A\, \tfrac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

ſi in ſe inuicem ducantur, producturos expreſſionem hanc

$(\alpha + \beta x^n)^2$

ideoque, ſi ex ſingulis illis factoribus radices quadratae extrahantur, productum ex his omnibus radicibus dabit formulam

mulam $\alpha + \beta x^n$. Simili modo ſi, vt ante, loco k omnes numeri integri 1, 2, 3, ... n ſubſtituantur, tum omnes factores trinomiales, quorum numerus erit $= n$, qui reſultant ex forma generali

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\text{coſ. A.}\,\frac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

ſi in ſe mutuo ducantur, dabunt productum

$$(\alpha - \beta x^n)^2$$

Atque idcirco, ſi ex ſingulis his factoribus radices quadratae extrahantur, earum productum dabit ipſam expreſſionem $\alpha - \beta x^n$.

§. 30. Hoc igitur pacto reſolui poteſt formula $\alpha \pm \beta x^n$ in n factores, quorum quilibet eſt radix quadrata ex expreſſione trinomiali huiusmodi.

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta},\,\text{coſ. A.}\,\Phi + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Poteſt autem radix quadrata ex huiusmodi expreſſione admodum ſuccincte geometrice conſtrui;

Erit enim $\sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\text{coſ. A.}\Phi + xx\sqrt[n]{\beta^2})} = \sqrt{((\sqrt[n]{\alpha}.\,\text{coſ. A.}\,\Phi - x\sqrt[n]{\beta})^2 + (\sqrt[n]{\alpha}.\,\text{ſin. A.}\Phi)^2)}$.

Erit ergo quilibet eorum factorum hypothenuſa trianguli rectanguli, cuius alter cathetus $= \sqrt[n]{\alpha}.\,\text{coſ. A}.\,\Phi - x\sqrt[n]{\beta}$ et alter $\sqrt[n]{\alpha}.\,\text{ſin. A}.\,\Phi$, quae expreſſiones in circulo, cuius radius $= \sqrt[n]{\alpha}$, commodiſſime exhiberi poſſunt.

Tab. I. fig. 5. Fiat nempe circulus P Q R S T V centro C et radio CP $= \sqrt[n]{\alpha}$; diuidatur eius peripheria in $2n$, ſeu ſemiperipheria

pheria in n partes, erit $Pp = \frac{\pi}{n}$; $PQ = \frac{2\pi}{n}$; $Pq = \frac{3\pi}{n}$; $PR = \frac{4\pi}{n}$; $Pr = \frac{5\pi}{n}$; etc.
Capiatur porro in radio CP diſtantia $CO = x\sqrt[n]{\beta}$; atque ex puncto O ad ſingula diuiſionis puncta ducantur rectae OP, Op, OQ, Oq, etc. quae, quantae futurae ſint, ex recta indefinita OM colligi poterit. Sit arcus $PM = \Phi$ et ducta perpendiculari MN erit $MN = \sqrt[n]{\alpha}\,.\,\text{ſin. A}\,.\,\Phi$; $CN = \sqrt[n]{\alpha}\,.\,\text{coſ. A}\Phi$; ideoque $ON = \sqrt[n]{\alpha}\,.\,\text{coſ. A}\,\Phi - x\sqrt[n]{\beta}$; vnde fiet $OM = \sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2\sqrt[n]{\alpha\beta}\,\text{coſ. A}\Phi + x^2\sqrt[n]{\beta^2})}$. Ex his ergo ſumendis diuiſionum punctis paribus erit

$$OP\,.\,OQ\,.\,OR\,.\,OS\,.\,OT\,.\,OV = \alpha - \beta x^n$$

ſumendis autem diuiſionibus imparibus erit

$$Op\,.\,Oq\,.\,Or\,.\,Os\,.\,Ot\,.\,Ov = \alpha + \beta x^n$$

hocque eſt theorema elegantiſſimum a Coteſio inuentum, cuius adeo demonſtratio per methodum noſtram inueſtigandi factores trinomiales a priori eſt data.

§. 31. Progrediamur ad exemplum magis intricatum atque quaeramus factores reales tum ſimplices quam trinomiales huius expreſſionis

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

cuius factor trinomialis quicunque ſi fuerit

$$p - 2x\sqrt{pq}\,.\,\text{coſ. A}\,\Phi + qxx$$

poſito $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$, incognitae f et Φ ex his duabus aequationibus erui debebunt.

$$\alpha + \beta f^n\,\text{coſ. A}\,.\,n\Phi + \gamma f^{2n}\,\text{coſ. A}\,.\,2n\Phi = 0$$

$$\beta f^n\,\text{ſin. A}\,.\,n\Phi + \gamma f^{2n}\,\text{ſin. A}\,.\,2n\Phi = 0$$

Cum iam ſit ſin. A. $2n\Phi = 2$ ſin. A. $n\Phi$. coſ A. $n\Phi$, erit ex aequatione poſteriori vel ſin. A. $n\Phi = 0$ vel $\beta + 2\gamma f^n$ coſ. A. $n\Phi = 0$. Sit primo ſin. A. $n\Phi = 0$ erit vel $n\Phi = 2k\pi$ vel $n\Phi = (2k-1)\pi$; ponamus ergo $n\Phi = 2k\pi$ erit coſ. A. $n\Phi = 1$, et coſ. A. $2n\Phi = 1$, vnde $\alpha + \beta f^n + \gamma f^{2n} = 0$; hincque $f^n = \frac{-\beta \pm \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\gamma}$ ſin autem $n\Phi = (2k-1)\pi$ erit coſ. A. $n\Phi = -1$ et coſ. A. $2n\Phi = +1$ vnde $\alpha - \beta f^n + \gamma f^{2n} = 0$ hincque $f^n = \frac{\beta \pm \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\gamma}$. Iſtae ergo ſolutiones locum habere, non poſſunt, niſi ſit $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Sit ergo $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ atque ſequentes caſus erunt notandi.

I. $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$

Vt f^n affirmatiuum obtineat valorem, ſumi debet $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ eritque $f = \sqrt[n]{\frac{\beta \pm \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\gamma}} = \surd\frac{p}{q}$ ſit $\frac{\beta + \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2} = \zeta$ et $\frac{\beta - \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2} = \eta$; eruntque factores trinomiales huius formae hi bini

$$\sqrt[n]{\zeta^2} - 2x\sqrt[n]{\gamma\zeta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}\,.$$

$$\sqrt[n]{\eta^2} - 2x\sqrt[n]{\gamma\eta}\,.\,\text{coſ. A.}\,\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

vtraque expreſſio vt praecedenti caſu tractata dabit factores reales vel ſimplices (nempe ſi n numerus impar) vel trinomiales, qui omnes in ſe inuicem ducti expreſſionem propoſitam producunt.

§. 32. Maneat $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, ſitque haec forma propoſita.

II. $\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n}$

Vt f^n affirmatiuum valorem obtineat, ſumi debet $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$ eritque $f = \sqrt[n]{\frac{\beta \pm \surd(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{2\gamma}} = \surd\frac{p}{q}$, ſit vt ante

$\beta +$

$\frac{\beta+\surd(\beta^2-4\alpha\gamma)}{2} = \zeta$ et $\frac{\beta-\surd(\beta^2-4\alpha\gamma)}{2} = \eta$, hincque orientur ſequentes duae formae pro factoribus trinomialibus quaeſitis

$$\sqrt[n]{}\zeta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\zeta.\,\text{coſ. A}.\,\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

$$\sqrt[n]{}\eta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\eta.\,\text{coſ. A}.\,\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

qui, quoties fiunt quadrata, radices praebent ſimplices reales, ceteris caſibus factores trinomiales reſultant. Sit iam propoſita iſta expreſſio

III. $\alpha + \beta x^n - \gamma x^{2n}$

in qua ſemper eſt $\beta^2 + 4\alpha\gamma$ quantitas poſitiua. Praebet autem caſus $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$ vnum valorem poſitiuum pro $f^n = \frac{\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2\gamma}$; alterque caſus $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ pariter vnum $f^n = \frac{-\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2\gamma}$. Ponatur $\frac{\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2} = \zeta$ et $\frac{-\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2} = \eta$, atque ſequentes duae formulae dabunt omnes factores reales tam ſimplices (quando ſcilicet fiunt quadrata) quam trinomiales:

$$\sqrt[n]{}\zeta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\zeta.\,\text{coſ. A}.\,\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

$$\sqrt[n]{}\eta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\eta.\,\text{coſ. A}.\,\tfrac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

§. 33. Quartus caſus, quo ſponte fit $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, eſt haec forma

IV. $\alpha - \beta x^n - \gamma x^{2n}$

Hic iterum caſus $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$ vnum praebet caſum poſitiuum pro $f^n = \frac{-\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2\gamma}$ alterque caſus $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ pariter vnum $f^n = \frac{\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2\gamma}$. Ponatur ergo $\frac{-\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2} = \zeta$ et $\frac{\beta+\surd(\beta^2+4\alpha\gamma)}{2} = \eta$, atque omnes factores formulae

 pro-

propoſitae tam ſimplices, quam trinomiales continebuntur in his binis ſequentibus expreſſionibus:

$$\sqrt[n]{}\ \zeta^2 - 2x\sqrt[n]{}\ \gamma\zeta.\ \text{coſ. A.}\ \tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\ \gamma\gamma$$

$$\sqrt[n]{}\ \eta^2 - 2x\sqrt[n]{}\ \gamma\eta.\ \text{coſ. A.}\ \tfrac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\ \gamma\gamma$$

Ceterum de his caſibus, quibus $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, notandum eſt, iis formulam propoſitam

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

actu poſſe reſolui in binas formulas reales duobus terminis conſtantes

$$\sqrt{\alpha} + x^n \left(\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\sqrt{\alpha} + x^n \left(\frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

quae cum ſimiles ſint iis, quas primo loco tractauimus, vtraque ſeorſim modo iam expoſito in ſuos factores reſolvi poterit. Prouenient autem hoc pacto illi ipſi factores, quos hic exhibuimus.

§. 34. Pro caſibus iam, quibus non eſt $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, alteram ſolutionem aequationis

$$\beta f^n\ \text{ſin. A.}\ n\Phi + \gamma f^{2n}\ \text{ſin. A.}\ 2n\Phi = 0$$

accipi conueniet, quae dat $\beta + 2\gamma f^n$ coſ. A. $n\Phi = 0$ Sit coſ. A. $n\Phi = z$, erit $f^n = \frac{-\beta}{2\gamma z}$; qui valor ob coſ. A. $2n\Phi = 2zz - 1$ in priori aequatione ſubſtitutus dat $\alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta(2zz-1)}{4\gamma zz} = 0$ ſeu $4\alpha\gamma zz = \beta\beta$; hinc erit $z = \frac{-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$; et $f^n = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ideoque $p = \sqrt[n]{}\ \alpha$ et $q = \sqrt[n]{}\ \gamma$. Ponamus eum arcum minimum $= \omega$, cuius coſinus eſt $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$

eritque

eritque coſ. A $((2k-1)\pi \mp \omega) = \frac{-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = x$; ideoque obtinetur $\Phi = \frac{(2k-1)\pi \pm \omega}{n}$. Quocirca caſu $\beta^2 < 4\alpha\gamma$, ſi arcus, cuius coſinus eſt $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ponatur $= \omega$ erit formulae propoſitae

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

quilibet factor trinomialis in hac forma contentus

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}\,.\,\text{coſ.A}\,.\,\frac{(2k-1)\pi \pm \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

Huiusmodi autem factores habebuntur numero n, qui prodibunt ſi loco k ſucceſſiue omnes numeri integri $1, 2, 3 \ldots$ vsque ad n ſubſtituantur, tribuendo ipſi ω ſiue ſignum $+$ ſiue $-$; vtroque enim caſu arcus prodibunt, quorum coſinus congruent. Signum ſcilicet $-$ arcu ω praefixum eosdem dabit coſinus, quos ſignum $+$, ordine tantum retrogrado, ſiquidem loco k numeri $1, 2, 3 \ldots n$ ſubſtituantur.

vnde factores ipſi erunt ſequentes

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}\,.\,\text{coſ.A}\,.\,\frac{\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}\,.\,\text{coſ.A}\,.\,\frac{3\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}\,.\,\text{coſ.A}\,.\,\frac{5\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}\,.\,\text{coſ.A}\,.\,\frac{(2n-1)\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

§. 35. Si coefficiens β fuerit negatiuus, ſeu, ſi huius formae, exiſtente $\beta\beta < 4\alpha\gamma$,

$$\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

factores debeant inueſtigari; tum calculo vt ante ſubducto, erit $f^n = \frac{\beta}{2\gamma z}$ et $z = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = \text{coſ.} A . n\Phi$. Quodſi ergo arcus, cuius coſinus $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ponatur ω, fiet etiam $\text{coſ.} A (2k\pi \pm \omega) = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ex quo $\Phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$. Factor igitur quicunque formulae propoſitae continebitur in hac forma

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{coſ.} A . \frac{2k\pi \mp \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}.$$

Ipſi ergo factores trinomiales, quorum numerus eſt n, erunt ſequentes:

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{coſ.} A . \frac{2\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{coſ.} A . \frac{4\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{coſ.} A . \frac{6\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{coſ.} A . \frac{2n\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

§. 36. Hi etiam factores ſimili modo, quo caſu praecedenti, commode per circulum conſtrui poſſunt. Conſtruatur enim circulus PQRSTV radio $CA = \sqrt[n]{\alpha}$ eiusque peripheria diuidatur in $2n$ partes, in punctis P, p, Q, q, etc. Tum a puncto primo diuiſionis P capiatur arcus $PA = \frac{\omega}{n}$, ita vt arcus $n . PA$ coſinus ſit $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$. Tum per A ducatur diameter AB, et in eo ex centro C capiatur $CO = x\sqrt[n]{\gamma}$; atque ex puncto hoc O ad ſingula diuiſionis puncta ducantur rectae. Erit autem $Ap = \frac{\pi - \omega}{n}$; $AQ = \frac{2\pi - \omega}{n}$; $Aq = \frac{3\pi - \omega}{n}$, etc. Quoniam vero

Tab. I. fig. 6.

ſumto

quocunque arcu $AM = \Phi$, et demiſſo ſinu MN eſt $MN = \sqrt[n]{\alpha}.\, \text{ſin.} A.\Phi$ et $ON = \sqrt[n]{\alpha}.\, \text{coſ.} A\Phi - x\sqrt[n]{\gamma}$, erit $OM = \sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\, \text{coſ.} A\Phi + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma})}$ erit loco Φ arcubus Ap, AQ, Aq, etc. ſubſtituendo $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} = Op^2\, Oq^2\, Or^2\, Os^2\, Ot^2\, Ov^2$; atque $\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n} = OQ^2\, OR^2\, OS^2\, OT^2\, OV^2\, OP^2$. Quae ſunt theoremata a Celeb. Moivraeo demonſtrata.

§. 37. Antequam iſtam formulae $\alpha \pm \beta x^n + \gamma x^{2n}$ reſolutionem in factores trinomiales dimittamus, non abs re erit annotare, quod cum terminus x^1 deſit in producto, ſumma omnium coefficientium ipſius x in factoribus aequalis nihilo eſſe debeat. Erit ergo

$$\text{coſ.} A.\tfrac{\pi-\omega}{n} + \text{coſ.} A.\tfrac{3\pi-\omega}{n} + \text{coſ.} A.\tfrac{5\pi-\omega}{n} + \ldots + \text{coſ.} A.\tfrac{(2n-1)\pi-\omega}{n} = 0$$

et

$$\text{coſ.} A.\tfrac{2\pi-\omega}{n} + \text{coſ.} A.\tfrac{4\pi-\omega}{n} + \text{coſ.} A.\tfrac{6\pi-\omega}{n} + \ldots + \text{coſ.} A.\tfrac{2n\pi-\omega}{n} = 0$$

Quod quidem, ſi n eſt numerus par, ſponte patet, tum enim alii coſinus fiunt negatiui atque aequales ratione reliquorum. Quando autem n eſt numerus impar, puta $n = 2m - 1$; tum coſinus negatiui affirmatiuos ſinguli ſingulos non deſtruunt, interim tamen omnes negatiui ſimul ſumti affirmatiuis ſimul ſumtis aequales erunt. Eſt vero $\text{coſ} A.\Phi = \tfrac{1}{2}\, \text{chord.} A(\pi + 2\Phi)$ et quia eſt $\Phi = \frac{(2k-1)\pi - \omega}{2m-1}$, erit $\text{coſ.} A\frac{(2k-1)\pi-\omega}{2m-1} = \tfrac{1}{2}\, \text{chord.} A.(\pi - \frac{2\omega}{2m-1} + \frac{2(2k-1)\pi}{2m-1})$; omnesque hae chordae, quarum numerus eſt $= 2m - 1$ ſimul ſumtae erunt $= 0$. Sit $\xi = \pi - \frac{2\omega}{2m-1}$, et ponatur $\frac{2\pi}{2m-1} = \varrho$, ita vt ϱ ſit vna pars totius peripheriae, ſi

ea

ea fuerit in numerum quemcunque imparem partium ae-
Tab. II. qualium diuiſa. Hanc obrem erit chord. $A(\xi+\rho)+$
fig. I. chord. $A(\xi+3\rho)+$ chord. $A(\xi+5\rho)+\ldots+$ chord. $A(\xi+(4m-3)\rho)=0$. Si ergo peripheria circuli in numerum quemcunque imparem partium aequalium verbi gratia in nouem partes aequales Pp, pQ, Qq, qR, Rr, rS, Ss, sT, TP diuidatur atque in peripheria punctum capiatur quodcunque A; ex quo ad ſingula peripheriae puncta chordae ducantur, erit poſita vna peripheriae parte nona $=\rho$, et arcu AP pro arbitrio aſſumto $=\xi$ erit

chord. $A(\xi+\rho)=Ap$	chord. $A(\xi+11\rho)=-AQ$
chord. $A(\xi+3\rho)=Aq$	chord. $A(\xi+13\rho)=-AR$
chord. $A(\xi+5\rho)=Ar$	chord. $A(\xi+15\rho)=-AS$
chord. $A(\xi+7\rho)=As$	chord. $A(\xi+17\rho)=-AT$

chord. $A(\xi+9\rho)=-AP$;

chordae enim arcuum tota peripheria maiorum, pariter ac ſinus arcuum ſemiperipheria maiorum, fiunt negatiuae. Erit ergo ductis vti praecepimus chordis,

$$Ap+Aq+Ar+As=AP+AQ+AR+AS+AT$$

ſiue

$$AP-Ap+AQ-Aq+AR-Ar+AS-As+AT=0$$

Quod eſt theorema circa chordas non inelegans, notum quidem, at ex traditis praeceptis ſponte quaſi deriuatum.

§. 38. Reſolutionem formularum $\alpha+\beta x^n$ et $\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}$ in factores fuſius expoſuimus, eo quod formulae quantumuis compoſitae in eiusmodi formulas reſolui poſſint; ex quo ſecundum haec praecepta formularum magis compoſitarum facto-

res

res ſimplices vel trinomiales inueniri poterunt, conceſſa reſolutione aequationum altiorum dimenſionum. Sit nempe propoſita iſta formula

$$\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}+\delta x^{3n}$$

poſito $x^n=z$, ea abibit in $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3$ quae perpetuo vnum diuiſorem ſimplicem habebit realem, quoniam maximus ipſius z exponens eſt impar. Quamobrem formula propoſita vel in tres binomiales huiusmodi $a+bx^n$ vel in vnam huiusmodi $a+bx^n$ et in vnam trinomialem reſoluitur $a+bx^n+ex^{2n}$; hincque eius factores vel trinomiales vel ſimplices facile per praecepta praecedentia aſſignantur. Loco formulae igitur $\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}+\delta x^{3n}$ ſemper ſubſtitui poteſt huiusmodi expreſſio

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x^n)(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^n+\mathfrak{C}x^{2n})$$

cuius omnes factores reales tam ſimplices quam trinomiales ope regulae traditae exhibebuntur.

§. 39. Propoſita iam ſit haec expreſſio

$$\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}+\delta x^{3n}+\varepsilon x^{4n}$$

cuius factores reales tam ſimplices quam trinomiales inueſtigari oporteat. Ponamus $x^n=z$, et habebimus hanc expreſſionem quatuor dimenſionum

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4$$

quae nihilo aequalis poſita vel omnes radices habebit imaginarias vel duas tantum vel nullam. Poſterioribus binis caſibus reſolutio propoſita in factores nulla laborat difficultate, eo quod iis expreſſio propoſita in binas reales huius formae

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^n+\mathfrak{C}x^{2n}$$

 diſtribui

diſtribui poteſt. At ſi omnes quatuor radices aequationis $\text{Q} = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$ ſint imaginariae, tum reſolutio in factores per regulas traditas abſolui non poteſt, niſi conſtiterit expreſſionem propoſitam

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$$

reſolui poſſe in huiusmodi binos factores reales

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x^n + \mathfrak{C} x^{2n})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} x^n + \mathfrak{c} x^{2n})$$

quod, etſi fieri poſſe ſupra iam docuimus, tamen idem pro hoc caſu data opera ſeorſim demõnſtrabimus, quo ſimul magis fiet perſpicuum, omnem expreſſionem algebraicam in factores reales vel ſimplices vel trinomiales reſolui poſſe.

§. 40. Ad hanc demonſtrationem concinnandam praemitto iſtud lemma:

> *Aequatio quaecunque algebraica parium dimenſionum, in qua maxima incognitae poteſtas et terminus abſolutus ſeu cognitus diſparia habent ſigna, duas ad minimum habet radices, quarum altera erit affirmatiua, altera negatiua.*

Sit enim huiusmodi aequatio

$$z^{2m} + a z^{2m-1} + b z^{2m-2} + c z^{2m-3} + \ldots\ldots - p = 0$$

in qua maxima ipſius z poteſtas habet ſignum $+$ terminus abſolutus autem p ſignum $-$. Transferatur terminus abſolutus p ad alteram ſigni $=$ partem, ita vt ex altera parte omnes termini incogita z affecti maneant, habebiturque haec aequatio

$$z^{2m} + a z^{2m-1} + b z^{2m-2} + c z^{2m-3} + \ldots + n z = p$$

vocemus totum membrum incognitum, ſeu omnes terminos

nos z inuoluentes iunctim ſumtos breuitatis gratia $= Z$, vt ſit $Z = p$; atque manifeſtum eſt, ſi ponatur $z = +\infty$, fieri $Z = +\infty$; ſin autem ponatur $z = 0$, fiet $Z = 0$. Loco z igitur omnes valores intra 0 et $+\infty$, hoc eſt, omnes numeros affirmatiuos ſubſtituendo, pro Z omnes poſſibiles numeri affirmatiui reſultabunt. Quare cum p ſit numerus affirmatiuus, dabitur numerus affirmatiuus, qui loco z ſubſtitutus efficiat $Z = p$, ideoque aequatio propoſita vnam certe habebit radicem affirmatiuam. Si iam loco z ponamus $-\infty$, fiet iterum $Z = +\infty$, ex quo ſi loco z omnes numeri negatiui ſeu intra 0 et $-\infty$ contenti ſubſtituantur, tum denuo pro Z omnes numeri poſſibiles affirmatiui prodibunt; quare dabitur quoque numerus negatiuus, qui loco z ſubſtitutus faciet $Z = p$, hincque aequatio propoſita $Z - p = 0$ habebit quoque radicem negatiuam. Aequatio igitur

$$z^{2m} + az^{2m-1} + bz^{2m-2} + cz^{2m-3} + \ldots\ldots - p = 0$$

ſi p fuerit quantitas poſitiua, certo duas habet radices reales, quarum vna eſt affirmatiua.

§. 41. Vt iam oſtendamus expreſſionum

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$$

perpetuo in duos factores reales reſolubilem eſſe; ſufficiet breuitatis gratia oſtendiſſe, hanc expreſſionem $z^4 + pz^2 + qz + r$ reſolui poſſe in duos factores $zz + uz + A$ et $zz + uz + B$, qui ſint reales. Ponendo enim $x^n = z$, et termino ſecundo tollendo, illa expreſſio in hanc transmutatur: Cum igitur pro coefficientibus r, A; et B valores reales inueniri debeant, vt ſit

$z^4 + pz^2 + qz + r = (zz + uz + A)(zz - uz + B)$
erit $p = A + B - uu$; $q = Bu - Au$; et $r = AB$, binae priores aequationes vero dant

$$B = p + uu - A = \frac{q + Au}{u} \text{ vnde fit}$$

$$A = \frac{u^3 + pu - q}{2u} \text{ et } B = \frac{u^3 + pu + q}{2u}$$

qui valores in tertia aequatione ſubſtituti dant

$$4ruu = u^6 + 2pu^4 + ppuu - qq \text{ ſeu}$$

$$u^6 + 2pu^4 + (pp - 4r)uu - qq = 0$$

quae cum ſit aequatio parium dimenſionum, atque terminus abſolutus qq ſemper poſitiuus ſignum habeat oppoſitum ſummae poteſtati incognitae u, haec aequatio certo pro u ynam radicem realem dabit. Inuento autem pro u valore reali, valores quoque pro A et B fient reales, hincque factores $zz + uz + A$ et $zz - uz + B$ ipſi prodibunt reales. Simili autem modo demonſtrabitur omnem expreſſionem parium dimenſionum ſemper reſolubilem eſſe in factores trinomiales reales. Hoc certe euictum eſt hanc expreſſionem multo latius patentem

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$$

reſolubilem eſſe in factores reales vel ſimplices vel trinomiales; quotcunque ea contineat dimenſiones.

§. 42. Tradito igitur non ſolum modo factores trinomiales inueniendi, ſed etiam actu euolutis factoribus formularum principalium $\alpha + \beta x^n$ et $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ exponendum eſt, quemadmodum, ſi cognitus fuerit factor trinomialis denominatoris N, in formula differentiali $\frac{M\,dx}{N}$ integralis pars ex hoc factore oriunda debeat determinari.

minari. Sit igitur denominatoris N factor trinomialis quicunque

$$p - 2x\sqrt{pq}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi + qxx$$

qui reſoluitur in hos ſimplices imaginarios

$$x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi - \sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi$$

$$x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi + \sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi$$

Ex his per methodum ante expoſitam reſultant integralis quaeſiti binae ſequentes partes

$$+ \int \frac{A\,dx}{x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi - \sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi}$$

$$+ \int \frac{B\,dx}{x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{coſ.}\,A\Phi + \sqrt{-p}\,.\,\text{ſin.}\,A\Phi}$$

vbi coeffitientes A et B determinantur ex $\frac{M\,dx}{dN}$ ſubſtituendo loco x valorem, quem ex vtroque denominatore nihilo aequali poſito obtinet. Sit igitur $\frac{dN}{dx} = L$, eritque $A = \frac{M}{L}$ poſito vbique loco x valore $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ coſ. $A\Phi + \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}}$ ſin. $A\,.\,\Phi$. Simili vero modo eſt $B = \frac{M}{L}$ poſito loco x hoc valore $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. coſ. $A\Phi - \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}}$. ſin. $A\Phi$.

§ 43. Ponatur $f = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; et cum ſit

$$x = f\ \text{coſ.}\,A\Phi \pm f\sqrt{-1}\,.\ \text{ſin.}\,A\,.\,\Phi$$

erit, vt ſupra vidimus, poteſtas quaecunque

$$x^k = f^k\ \text{coſ.}\,Ak\Phi \pm f^k\sqrt{-1}\,.\ \text{ſin.}\,A\,.\,k\Phi$$

Ad ſubſtitutiones ergo faciendas, ponatur primo f^k coſ. $A\,.\,k\Phi$ vbique loco x^k, hocque facto abeat M in $\mathfrak{M}$ et L in $\mathfrak{L}$. Deinde ponatur f^k ſin. $A\,.\,k\Phi$ loco x^k, abeatque M in $\mathfrak{m}$ et L in $\mathfrak{l}$. Hoc facto fiet $A =$

$$\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{m}\sqrt{-1}}{\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\sqrt{-1}},\ \text{et}$$

 B =

$B = \frac{\mathfrak{M} - \mathfrak{m}\sqrt{-1}}{\mathfrak{L} - \mathfrak{l}\sqrt{-1}}$. Ex his colligitur $A + B =$
$= \frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M} + 2\mathfrak{l}\mathfrak{m}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l}}$, et $A - B = \frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{m} - 2\mathfrak{l}\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l}} \sqrt{-1}$
His inuentis ſumma illarum duarum fractionum integralium erit

$$\int \frac{2(\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\mathfrak{m})x\sqrt{q} - 2(\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\mathfrak{m})\sqrt{p},\ \text{coſ.}\, A\Phi + 2(\mathfrak{l}\mathfrak{M} - \mathfrak{L}\mathfrak{m})\sqrt{p},\ \text{ſin.}\, A\Phi}{(p - 2x\sqrt{pq},\ \text{coſ.}\, A\Phi + qxx)(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}\, dx$$

vnde ipſum integrale ex factore trinomiali

$$p - 2x\sqrt{pq},\ \text{coſ.}\, A\Phi + qxx$$

oriundum per logarithmos et arcus circulares erit

$$\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\mathfrak{m}}{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)\sqrt{q}}\, l(p - 2x\sqrt{pq},\ \text{coſ.}\, A\Phi + qxx) + \frac{2(\mathfrak{l}\mathfrak{M} - \mathfrak{L}\mathfrak{m})}{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)\sqrt{q}}\, A\ \text{tang}\, \frac{x\sqrt{q},\ \text{ſin.}\, A . \Phi}{\sqrt{p} - x\sqrt{q},\ \text{coſ.}\, A . \Phi}$$

vbi $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$ ex datis L et M ita determinantur, vt fiat

$\left.\begin{matrix} M = \mathfrak{M} \\ L = \mathfrak{L} \end{matrix}\right\}$ poſito $x^k = f^k\, \text{coſ.}\, A . k\Phi$

$\left.\begin{matrix} M = \mathfrak{m} \\ L = \mathfrak{l} \end{matrix}\right\}$ poſito $x^k = f^k\, \text{ſin.}\, A . k\Phi$

eſtque $L = \frac{dN}{dx}$ et $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$, vti aſſumſimus. Ponatur porro:

$\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}} = \text{coſ.}\, A . \lambda \ \Big| \ \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)}} = \text{coſ.}\, A . \mu$

$\frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}} = \text{ſin.}\, A . \lambda \ \Big| \ \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)}} = \text{ſin.}\, A . \mu$

ita vt ſit $\lambda = A\ \text{tang.}\, \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}}$ et $\mu = A\ \text{tang.}\, \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}}$ reperienturque hinc arcus λ et μ facili negotio.

Ex his vero colligetur fore:

$\text{ſin.}\, A(\lambda - \mu) = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{M} - \mathfrak{L}\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)}}$

$\text{coſ.}\, A(\lambda - \mu) = \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)}}$

Iam ponatur $\frac{\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)}}{\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)}} = \mathfrak{K}$, eritque integralis pars ex factore hoc

$$p = 2x\sqrt{pq} . \text{coſ.}\, A\Phi + qxx$$

oriunda,

oriunda, ſimplicius hoc modo expreſſa

$$\frac{\mathfrak{K}\,\text{coſ.}\,A(\lambda-\mu)}{\sqrt{q}}\, l(p - 2x\sqrt{pq}.\,\text{coſ.}\,A\Phi + qxx)$$

$$+ \frac{2\mathfrak{K}\,\text{ſin.}\,A(\lambda-\mu)}{\sqrt{q}}\, A\,\text{tang.}\, \frac{x\sqrt{q}.\,\text{ſin.}\,A.\Phi}{\sqrt{p} - x\sqrt{q}.\,\text{coſ.}\,A\Phi}$$

Pro quouis igitur caſu ea forma, quae commodior viſa fuerit, vti licebit.

Problema 1.

§. 44. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{\alpha + \beta x^n}$, exiſtentibus α et β quantitatibus poſitiuis.

Solutio.

Hic eſt $M = x^m$ et $N = \alpha + \beta x^n$ et $\frac{dN}{dx} = L = n\beta x^{n-1}$ Factor autem generalis denominatoris N eſt per §. 26.

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\text{coſ.}\,A\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

vnde eſt $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$; $q = \sqrt[n]{\beta^2}$, et $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ atque $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$. Ex his fit:

$$\mathfrak{M} = f^m\,\text{coſ.}\,A.\,m\Phi \mid \mathfrak{L} = n\beta f^{n-1}\,\text{coſ.}\,A(n-1)\Phi$$

$$\mathfrak{m} = f^m\,\text{ſin.}\,A.\,m\Phi \mid \mathfrak{l} = n\beta f^{n-1}\,\text{ſin.}\,A(n-1)\Phi$$

atque porro $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}} = \text{tang.}\,A(n-1)\Phi = \text{tang.}\,A\lambda$, vnde $\lambda = (n-1)\Phi$. Simili modo eſt $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}} = \text{tang.}\,A.\,m\Phi = \text{tang.}\,A\mu$, ergo $\mu = m\Phi$. et $\lambda - \mu = (n-m-1)\Phi$. Deinde eſt $\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = f^m$ et $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = n\beta f^{n-1}$ ergo $\mathfrak{K} = \frac{1}{n\beta f^{n-m-1}} = \frac{f^{m+1}}{n\alpha}$. Ex quolibet ergo factore trinomiali denominatoris oritur haec integralis pars.

$$\frac{\text{coſ.}\,A\frac{(n-m-1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}\, l(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\text{coſ.}\,A\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2})$$

+ 2

$$+\frac{2\,\text{ſin.}\,A\frac{(n-m-1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}\,A\,\text{tang.}\frac{x\sqrt[n]{\beta}.\,\text{ſin.}\,A\frac{(2k-1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{\beta}.\,\text{coſ.}\,A\frac{(2k-1)\pi}{n}}$$

quae etiam hoc modo exhiberi poteſt:

$$-\frac{\text{coſ.}\,A\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}\,l(\sqrt[n]{\alpha^2}-2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\text{coſ.}\,A.\frac{(2k-1)\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\beta^2})$$

$$+\frac{2\,\text{ſin.}\,A.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x\sqrt[n]{\beta}.\,\text{ſin.}\,A.\frac{(2k-1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{\beta}.\,\text{coſ.}\,A.\frac{(2k-1)\pi}{n}}$$

Si iam loco $2k-1$ ſubſtituantur omnes numeri impares $1, 3, 5, 7$, etc. vsque ad n; atque adeo etiam ipſe numerus n, ſi ſit impar, prodibunt omnes integralis partes, quae quidem ex denominatore $N=\alpha+\beta x^n$ proficiſcuntur. Si igitur m fuerit numerus affirmatiuus minor quam n, his partibus in vnam ſummam colligendis completum oritur integrale quaeſitum; hicque etiam comprehendetur ea integralis pars, quae oritur ex factore ſimplici reali denominatoris, ſi n fuerit numerus impar: dummodo eius integralis, quod hoc caſu oritur, tantum ſemiſſis capiatur; vel loco quadrati, quod hoc caſu ſignum log. l habebit prefixum, eius tantum radix quadrata ſubſtituatur. Alterum enim membrum arcum circuli inuoluens hoc caſu euaneſcit.

Locum autem habent haec integralia ex denominatoris $\alpha+\beta x^n$ factoribus orta, ſiue m ſit maior quam n ſiue minor, ſiue etiam numerus negatiuus. Niſi autem m ſit numerus affirmatiuus minor quam n, ad integrale ex factoribus denominatoris $\alpha+\beta x^n$ inuentum quidpiam inſuper eſt adiiciendum.

Sit

Sit m numerus maior, quam n, ac ponatur $m = \sigma n + \tau$, exiſtente τ numero minore, quam n. Per regulam igitur primum datam ex fractione $\frac{x^{\sigma n + \tau}}{\alpha + \beta x^n}$ pars integra eſt extrahenda, quae erit huiusmodi $\frac{1}{\beta} x^{(\sigma - 1)n + \tau} - \frac{\alpha}{\beta^2} x^{(\sigma - 2)n + \tau} + \frac{\alpha^2}{\beta^3} x^{(\sigma - 3)n + \tau} - \ldots \ldots \mp \frac{\alpha^{\sigma - 1}}{\beta^\sigma} x^\tau$, in vltimo termino ſignum $+$ valet, ſi σ fuerit numerus impar, ſignum $-$ autem, ſi σ ſit numerus par. Hoc ergo caſu ad integrale ante ex factoribus denominatoris $\alpha + \beta x^n$ inuentum adiici debet hoc integrale:

$$\frac{x^{\sigma n - n + \tau + 1}}{\beta(\sigma n - n + \tau + 1)} - \frac{\alpha x^{\sigma n - 2n + \tau + 1}}{\beta^2(\sigma n - 2n + \tau + 1)} + \frac{\alpha^2 x^{\sigma n - 3n + \tau + 1}}{\beta^3(\sigma n - 3n + \tau + 1)}$$
$$- \frac{\alpha^3 x^{\sigma n - 4n + \tau + 1}}{\beta^4(\sigma n - 4n + \tau + 1)} \ldots \ldots \mp \frac{\alpha^{\sigma - 1} x^{\tau + 1}}{\beta^\sigma(\tau + 1)}.$$

Sit iam m numerus negatiuus, ac ponatur $m = -\sigma n - \tau$, exiſtente τ numero minore quam n; atque ad integrale ex factoribus ipſius $\alpha + \beta x^n$ inuentum inſuper addi debet integrale, quod oritur ex $x^{-\sigma n - \tau}$, quod membrum in denominatorem ingredietur. Habebimus ſcilicet $\frac{M}{N} = \frac{1}{x^{\sigma n + \tau}(\alpha + \beta x^n)}$ ponamus ex $x^{\sigma n + \tau}$ reſultare hanc fractionis partem $\frac{V}{x^{\sigma n + \tau}}$, atque manifeſtum eſt $1 - V(\alpha + \beta x^n)$ diuiſibile eſſe oportere per $x^{\sigma n + \tau}$. Erit ergo $V = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} x^n + \frac{\beta^2}{\alpha^3} x^{2n} - \ldots \pm \frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma + 1}} x^{\sigma n}$; fiet enim $1 - V(\alpha + \beta x^n) = \mp \beta \frac{\sigma + 1}{\alpha^{\sigma + 1}} x^{\sigma n + n}$, vtique diuiſibile

per $x^{\sigma n+\tau}$; vbi ſignorum ambiguorum ſuperius valet, ſi σ ſit numerus par, inferius ſi impar. Quare ad integrale ex factoribus ipſius $\alpha+\beta x^n$ inuentum adiici debet inſuper

$$\int\frac{V\,dx}{x^{\sigma n+\tau}}=\frac{-1}{\alpha(\sigma n+\tau-1)x^{\sigma n+\tau-1}}+\frac{\beta}{\alpha^2(\sigma n-n+\tau-1)x^{\sigma n-n+\tau-1}}$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^3(\sigma n-2n+\tau-1)x^{\sigma n-2n+\tau-1}}+\ldots\ldots\mp\frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma+1}(\tau-1)x^{\tau-1}}.$$

De cetero caſus, quo m eſt numerus negatiuus, ad praecedentem reduci poteſt, ita vt peculiari ſolutione non ſit opus. Si enim propoſita ſit haec formula differentialis $\frac{dx}{x^m(\alpha+\beta x^n)}$, ponatur $x=\frac{1}{y}$, atque habebitur $-\frac{y^{m+n-2}dy}{\alpha y^n+\beta}$, cuius integratio per extractionem partis integrae ex fractione $\frac{y^{m+n-2}}{\alpha y^n+\beta}$ abſoluitur, vti docuimus. Dedimus ergo integrale formulae $\frac{x^m dx}{\alpha+\beta x^n}$ pro valore quocunque exponentis m ſiue affirmatiuo ſiue negatiuo. Q. E. I.

Problema 2.

§. 45. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{\alpha-\beta x^n}$, exiſtente m quocunque numero integro ſiue affirmatiuo ſiue negatiuo.

Solutio.

Hic eſt $M=x^m$; $N=\alpha-\beta x^n$ et $L=\frac{dN}{dx}=-nx\beta^{n-1}$.

Factor

Factor autem generalis trinomialis denominatoris $N = \alpha - \beta x^n$ eſt per §. 28.

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ.A}.\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

vnde eſt $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$; $q = \sqrt[n]{\beta^2}$; $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$; et $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$

Ex his autem fiet porro

$\mathfrak{M} = f^m$ coſ. $A\,m\Phi$ | $\mathfrak{L} = -n\beta f^{n-1}$ coſ. $A\,(n-1)\Phi$
$\mathfrak{m} = f^m$ ſin. $A\,m\Phi$ | $\mathfrak{l} = -n\beta f^{n-1}$ ſin. $A\,(n-1)\Phi$

hincque $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}} =$ tang. $A\,(n-1)\Phi$, et $\lambda = (n-1)\Phi = \frac{2k(n-1)\pi}{n}$ atque $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}} =$ tang. $A\,.\,m\Phi$; et $\mu = m\Phi = \frac{2km\pi}{n}$; ideoque $\lambda - \mu = \frac{(n-m-1)2k\pi}{n}$; quare coſ. $A\,(\lambda-\mu) =$ coſ. $A\,\frac{(n-m-1)2k\pi}{n} =$ coſ. $A\,\frac{(m+1)2k\pi}{n}$, et ſin. $A\,(\lambda-\mu) =$ ſin. $A\,\frac{(n-m-1)2k\pi}{n} =$ ſin. $A\,\frac{(m+1)2k\pi}{n}$. Deinde eſt $\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = f^m$ et $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = -n\beta f^{n-1}$

ergo $\mathfrak{R} = \dfrac{-1}{n\beta f^{n-m-1}} = \dfrac{-\beta^{\frac{n-m-1}{n}}}{n\beta\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}} = \dfrac{-1}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}$

et $\dfrac{\mathfrak{R}}{\sqrt{q}} = \dfrac{-1}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}$. Ex factore ergo trinomiali generali naſcitur ſequens integralis pars:

$$\frac{-\text{coſ.}\,A\frac{(m+1)2k\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\,l\left(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{coſ.A}.\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}\right)$$

$$+\frac{2\,\text{ſin}\;A\frac{(m+1)2k\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\;A\,\text{tang.}\frac{x\sqrt[n]{\beta}\,.\,\text{ſin. A}.\frac{2k\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}\,\text{coſ.A}\frac{2k\pi}{n}}$$

Si iam loco $2k$ ſucceſſiue omnes numeri pares 0, 2, 4, 6, etc. vsque ad n, atque adeo ipſe numerus n, ſi ſit par, ſubſtituantur, prodibunt omnes integralis partes ex denominatore

minatore $\alpha - \beta x^n$ oriundae. Quoties autem ſit coſ. A. $\frac{2k\pi}{n}$ vel $+1$ vel -1, quorum illud euenit, ſi $2k = 0$, hoc vero caſu $2k = n$, ſi quidem n eſt numerus par, tum factor prodit ſimplex, et membrum a quadratura circuli pendens euaneſcit: membri autem logarithmici his caſibus ſemiſſis debet capi, ſeu quod eodem redit, loco quadrati, quod his caſibus ſignum log. l habebit praefixum, eius tantum radix quadrata ſcribi debet. Hocque pacto colligendis omnibus iſtis integralibus reſultabit completum integrale quaeſitum, ſi quidem m fuerit numerus affirmatiuus minor quam n. Quodſi autem m fuerit numerus maior quam m puta $m = \sigma n + \tau$, tum ad integrale illud inſuper addi debet $\frac{-x^{\sigma n - n + \tau + 1}}{\beta(\sigma n - n + \tau + 1)} \; \frac{-\alpha x^{\sigma n - 2n + \tau + 1}}{\beta^2(\sigma n - 2n + \tau + 1)} - \frac{\alpha^2 x^{\sigma n - 3n + \tau + 1}}{\beta^3(\sigma n - 3n + \tau + 1)} \cdots\cdots \frac{-\alpha^{\sigma - 1} x^{\tau + 1}}{\beta^\sigma(\tau + 1)}$. Sin autem m fuerit numerus negatiuus, puta $m = -\sigma n - \tau$, tum ad integrale ex factoribus denominatoris $\alpha - \beta x^n$ inuentum adiici oportebit: $\frac{-1}{\alpha(\sigma n + \tau - 1) x^{\sigma n + \tau - 1}} - \frac{\beta}{\alpha^2(\sigma n - n + \tau - 1) x^{\sigma n - n + \tau - 1}} - \frac{\beta^2}{\alpha^3(\sigma n - 2n + \tau - 1) x^{\sigma n - 2n + \tau - 1}} - \cdots - \frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma + 1}(\tau - 1) x^{\tau - 1}}$

Q. E. I.

Problema. 3.

§. 46. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}}$, denotante m numerum quemcunque integrum ſiue affirmatiuum ſiue negatiuum.

Solutio.

Solutio.

Hic eſt $M = x^m$; $N = \alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ et $L = \frac{dN}{dx} = n\beta x^{n-1} + 2n\gamma x^{2n-1}$. Factor autem ipſius N quicunque trinomialis ſit

$$p - 2x\sqrt{pq}.\ \text{coſ. A.}\ \Phi + qxx$$

ſingulos enim factores huius formae ſupra inuenire docuimus; ſit porro $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$; eritque

$$\mathfrak{M} = f^m\ \text{coſ. A.}\ m\Phi \quad \Big| \quad \mathfrak{L} = n\beta f^{n-1}\ \text{coſ. A.}(n-1)\Phi + 2n\gamma f^{2n-1}\ \text{coſ. A}(2n-1)\Phi$$
$$\mathfrak{m} = f^m\ \text{ſin. A.}\ m\Phi \quad \Big| \quad \mathfrak{l} = n\beta f^{n-1}\ \text{ſin. A.}(n-1)\Phi + 2n\gamma f^{2n-1}\ \text{ſin. A}(2n-1)\Phi$$

hincque $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}} = \text{tang. A.}\ m\Phi$ et $\mu = m\Phi$; ſimilique modo $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}} = \frac{\beta\ \text{ſin. A}(n-1)\Phi + 2\gamma f^n\ \text{ſin. A}(2n-1)\Phi}{\beta\ \text{coſ. A}(n-1)\Phi + 2\gamma f^n\ \text{coſ. A}(2n-1)\Phi} = \text{tang. A.}\ \lambda$ vnde arcus λ innoteſcit. Porro eſt $\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = f^m$ et $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = nf^{n-1}\sqrt{(\beta^2 + 4\beta\gamma f^n\ \text{coſ. A.}\ n\Phi + 4\gamma\gamma f^{2n})}$ ideoque $\mathfrak{R} =$

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}\sqrt{(\beta^2 + 4\beta\gamma f^n\ \text{coſ. A.}\ n\Phi + 4\gamma\gamma f^{2n})}}$$

Ex iſto ergo denominatoris factore generali orietur ſequens integralis pars

$$\frac{\mathfrak{R}\ \text{coſ. A}(\lambda - m\Phi)}{\sqrt{q}}\, l(p - 2x\sqrt{pq}\ \text{coſ. A}\ \Phi + qxx) + \frac{2\mathfrak{R}\ \text{ſin. A}(\lambda - m\Phi)}{\sqrt{q}}\ \text{A tang.}\ \frac{x\sqrt{q}.\ \text{ſin. A}\ \Phi}{\sqrt{p} - x\sqrt{q}.\ \text{coſ. A}\ \Phi}$$

Hoc igitur modo ex ſingulis denominatoris factoribus trinomialibus reſpondentes integralis partes reperiuntur: quoniam vero etiam factores ſimplices in factoribus trinomialibus continentur, quando hi in quadrata abeunt: etiam integralis partes ex his reſultantes obtinebuntur, ſi prioris membri logarithmici ſemiſſis ſumatur: alterum enim membrum à quadratura circuli pendens ſponte euaneſcit. Quodſi

 ergo

ergo exponens m fuerit numerus affirmatiuus minor quam $2n$, tum hoc modo completum integrale reperietur. At ſi m ſit numerus maior, quam $2n$, tum in fractione $\frac{M}{N}$ pars integra continebitur, ex qua peculiaris integralis pars naſcitur. Inuenitur autem haec pars integra per diuiſionem, vti ſupra oſtendimus. Quodſi autem m fuerit nnmerus negatiuus, tum ponatur $x = \frac{1}{y}$, atque formula propoſita $\frac{dx}{x^m(\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n})}$ abibit in hanc $\frac{-y^{2n+m-2}dy}{\alpha y^{2n}+\beta y^n+\gamma}$, ex qua ſi partes integrae eliciantur, atque integrentur, tum ea ipſa integralis pars reperietur, quae ex x^m, quatenus in denominatore verſatur, reſultat. Ope adeo regulae traditae omnino formularum differentialium integralia conceſſa aequationum quotcunque dimenſionum reſolutione actu exhiberi poterunt; ita vt non ſolum ſint quantitates reales, ſed etiam alias quadraturas praeter hyperbolae ac circuli non requirant.

Q. E. I.

Theo-

THEOREMATA
CIRCA DIVISORES NVMERORVM IN HAC FORMA $paa \pm qbb$ CONTENTORVM.

In ſequentibus theorematis litterae a et b deſignant numeros quoscunque integros, primos inter ſe, ſeu, qui praeter vnitatem nullum alium habeant diuiſorem communem.

Theorema 1.

Numerorum in hac forma $aa+bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel huius formae $4m+1$ numeri.

Theorema 2.

Omnes numeri primi huius formae $4m+1$ viciſſim in hac numerorum formula $aa+bb$ continentur.

Theorema 3.

Summa ergo duorum quadratorum ſeu numerus huius formae $aa+bb$ diuidi nequit per vllum numerum huius formae $4m-1$.

Theorema 4.

Numerorum in hac forma $aa+2bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel numeri in hac forma $8m+1$ vel in hac $8m+3$ contenti.

Theorema 5.

Omnes numeri primi in hac $8m+1$ vel hac $8m+3$ forma contenti viciſſim ſunt numeri huius formae $aa+2bb$.

Theo-

Theorema 6.

Nullus numerus huius formae $aa + 2bb$ diuidi poteſt per vllum numerum huius $8m - 1$ vel huius $8m - 3$ formae.

Theorema 7.

Numerorum in hac forma $aa + 3bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel 3, vel in vna harum formularum $12m + 1$, $12m + 7$ contenti.

Theorema 8.

Omnes numeri primi in alterutra harum formularum $12m + 1$, vel $12m + 7$ ſiue in hac vna $6m + 1$ contenti ſimul ſunt numeri huius formae $aa + 3bb$.

Theorema 9.

Nullus numerus ſiue huius $12m - 1$ ſiue huius $12m - 7$ formulae, hoc eſt nullus numerus huius formae $6m - 1$ eſt diuiſor vllius numeri in hac forma $aa + 3bb$ contenti.

Theorema 10.

Numerorum in hac forma $aa + 5bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel 5 vel in vna harum 4 formarum $20m + 1$, $20m + 3$, $20m + 7$, $20m + 9$ contenti.

Theorema 11.

Si fuerint numeri $20m + 1$, $20m + 3$, $20m + 9$, $20m + 7$ primi, tum erit vt ſequitur

$20m + 1 = aa + 5bb$; $2(20m + 3) = aa + 5bb$

$20m + 9 = aa + 5bb$; $2(20m + 7) = aa + 5bb$

Theo-

Theorema 12.

Nullus numerus in vna ſequentium formularum contentus $20m-1$; $20m-3$; $20m-9$; $20m-7$ poteſt eſſe diviſor vllius numeri huius formae $aa+5bb$.

Theorema 13.

Numerorum in hac forma $aa+7bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel 7 vel in vna ſequentium ſex formularum | ſeu in vna harum trium

$28m+1$	$28m+11$	$14m+1$
$28m+9$	$28m+15$	$14m+9$
$28m+25$	$28m+23$	$14m+11$

ſunt contenti.

Theorema 14.

Si fuerint numeri in iſtis formulis $14m+1$, $14m+9$, $14m+11$ contenti primi, tum ſimul in hac forma $aa+7bb$ continentur.

Theorema 15.

Nullus numerus huius formae $aa+7bb$ poteſt diuidi per vllum numerum, qui in vna ſequentium ſex formularum | ſeu harum trium

$28m+3$,	$28m+5$	$14m+3$
$28m+13$,	$28m+17$	$14m+5$
$28m+19$,	$28m+27$	$14m+13$

contineatur.

Theorema 16.

Numerorum in hac forma $aa+11bb$ contentorum

 omnes

omnes diuiſores primi ſunt vel 2 vel 11 vel continentur in vna ſequentium

10 formularum		ſeu 5 formularum
$44m+1$	$44m+3$	$22m+1$
$44m+9$	$44m+27$	$22m+3$
$44m+37$	$44m+23$	$22m+9$
$44m+25$	$44m+31$	$22m+5$
$44m+5$	$44m+15$	$22m+15$

Theorema 17.

Si fuerint numeri in his ſiue decem ſiue quinque formulis contenti primi, tum ſimul erunt vel ipſi vel eorum quadrupli numeri huius formae $aa+11bb$.

Theorema 18.

Nullus numerus huius formae $aa+11bb$ poteſt diuidi per vllum numerum, qui contineatur in vna ſequentium

ſiue 10 formularum		ſiue 5 formularum
$44m+7$,	$44m+29$	$22m+7$
$44m+13$,	$44m+35$	$22m+13$
$44m+17$,	$44m+39$	$22m+17$
$44m+19$,	$44m+41$	$22m+19$
$44m+21$,	$44m+43$	$22m+21$

Theorema 19.

Numerorum in hac forma $aa+13bb$ contentorum omnes diuiſores primi ſunt vel 2 vel 13 vel continentur in vna ſequentium 12 formularum.

$52m+1$	$52m+7$
$52m+49$	$52m+31$
$52m+9$	$52m+11$
$52m+25$	$52m+19$
$52m+29$	$52m+47$
$52m+17$	$52m+15$

Theorema 20.

Omnes numeri primi, qui in priori formularum iſtarum columna continentur, ſimul ſunt numeri huius formae $aa+13bb$. Numerorum autem primorum, qui in altera formularum columna continentur, dupla ſunt numeri formae $aa+13bb$.

Theorema 21.

Nullus numerus huius formae $aa+13bb$ diuidi poteſt per vllum numerum, qui contineatur in vna ſequentium formularum.

$52m+3$	$52m+35$
$52m+5$	$52m+37$
$52m+21$	$52m+41$
$52m+23$	$52m+43$
$52m+27$	$52m+45$
$52m+33$	$52m+51$

Theorema 22.

Numerorum in hac forma $aa+17bb$ contentorum omnes diuiſores primi ſunt vel 2 vel 17 vel in vna ſequentium formularum continentur.

$68m+1$	$68m+3$
$68m+9$	$68m+27$
$68m+13$	$68m+39$
$68m+49$	$68m+11$
$68m+33$	$68m+31$
$68m+25$	$68m+7$
$68m+21$	$68m+63$
$68m+53$	$68m+23$

Theorema 23.

Omnes numeri primi, qui in priori harum formularum columna continentur ad, quos 2 referri debet, ſint formae $aa+17bb$ vel ipſi quidem vel eorum noncupla. Numerorum autem primorum in altera columna contentorum tripla ſint numeri formae $aa+17bb$.

Theorema 24.

Nullus numerus huius formae $aa+17bb$ diuidi poteſt per vllum numerum, qui contineatur in aliqua ſequentium formularum

$68m-1$	$68m-3$
$68m-9$	$68m-27$
$68m-13$	$68m-39$
$68m-49$	$68m-11$
$68m-33$	$68m-31$
$68m-25$	$68m-7$
$68m-21$	$68m-63$
$68m-53$	$68m-23$

Theo-

Theorema 25.

Numerorum in hac forma $aa+19bb$ contentorum omnes diuiſores primi ſunt vel 2, vel 19, vel continentur in vna ſequentium

18 formularum		vel harum 9
$76m+1$	$76m+5$	$38m+1$
$76m+25$	$76m+49$	$38m+5$
$76m+17$	$76m+9$	$38m+7$
$76m+45$	$76m+73$	$38m+9$
$76m+61$	$76m+7$	$38m+11$
$76m+35$	$76m+23$	$38m+17$
$76m+39$	$76m+43$	$38m+23$
$76m+63$	$76m+11$	$38m+25$
$76m+55$	$76m+47$	$38m+35$

Theorema 26.

Omnes numeri primi, qui in vna harum formularum continentur, ſunt vel ipſi, vel ſaltem quater ſumti numeri huius formae $aa+19bb$.

Theorema 27.

Nullus numerus huius formae $aa+19bb$ diuidi poteſt per vllum numerum, qui contineatur in aliqua ſequentium 9 formularum

$38m-1$
$38m-5$
$38m-7$
$39m-9$
$38m-11$

$38m - 17$
$38m - 23$
$38m - 25$
$38m - 35$

His igitur theorematis continetur indoles formularum $aa + qbb$, ſi q fuerit numerus primus, ac primum quidem vidimus omnes diuiſores primos huiusmodi formularum eſſe vel 2 vel q, vel in talibus expreſſionibus $4qm + \alpha$ ita comprehendi poſſe, vt nullus diuiſor in iis non contineatur, tum vero, vt omnis numerus primus $4qm + \alpha$ ſimul ſit diuiſor formulae cuiusdam $aa + qbb$. Deinde etiam hoc colligere licet, ſi numerus primus formae $4qm + \alpha$ fuerit diuiſor cuiusquam numeri $aa + qbb$, tum nullum numerum formae $4qm - \alpha$ diuiſorem eſſe poſſe eiusdem expreſſionis $aa + qbb$. Cum igitur inter formas diuiſorum formulae $aa + qbb$ ſemper contineatur haec $4mq + 1$ manifeſtum eſt, nullum numerum $aa + qbb$ diuidi poſſe per vllum numerum formae $4mq - 1$. Denique attendenti manifeſtum fiet, ſi q fuerit numerus primus formae $4n - 1$, tum diuiſorum formas ad numerum duplo minorem redigi poſſe, ita vt ad formulas $2qm + \alpha$ reuocari queant, quod fieri nequit, ſi q ſit numerus primus formae $4n + 1$. Si igitur pro hac forma $aa + (4n + 1)bb$ diuiſor fuerit $4(4n + 1)m + \alpha$; tum nullus numerus formae iſtius $4(4n + 1)m + 2(4n + 1) + \alpha$ poterit eſſe diuiſor eiusdem expreſſionis $aa + (4n + 1)bb$. Plures annotationes faciemus, cum etiam formulas $qa + qbb$, quando q non eſt numerus primus, fuerimus contemplati.

Theo-

Theorema 28.

Numerorum in hac forma $aa+6bb$, vel hac $2aa+3bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel 3 vel in vna ſequentium formularum continentur.

$$24m+1 \qquad 24m+7$$
$$24m+5 \qquad 24m+11$$

Theorema 29.

Omnes numeri primi formae vel $24m+1$ vel $24m+7$ continentur in expreſſione $aa+6bb$; at numeri primi iſtam formam $24m+5$ et $24m+11$ continentur in expreſſione $2aa+3bb$.

Theorema 30.

Nullus numerus ſiue $aa+6bb$ ſiue $2aa+3bb$ diuidi poteſt per vllum numerum, qui contineatur in aliqua harum formularum

$$24m-1 \qquad 24m-5$$
$$24m-7 \qquad 24m-11$$

Theorema 31.

Numerorum in hac $aa+10bb$ vel hac forma $2aa+5bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel 5 vel in vna ſequentium formularum continentur

$$40m+1 \qquad 40m+7$$
$$40m+9 \qquad 40m+23$$
$$40m+11 \qquad 40m+37$$
$$40m+19 \qquad 40m+13$$

Theo-

Theorema 32.

Numeri primi in priori harum formularum columna contenti ſimul ſunt numeri huius formae $aa+10bb$ et numeri primi in altera columna contenti ſunt numeri huius formae $2aa+5bb$

Theorema 33.

Nullus numerus ſiue huius $aa+10bb$, ſiue huius $2aa+5bb$ formae diuidi poteſt per vllum numerum, qui in aliqua ſequentium formularum contineatur.

$40m-1$	$40m-7$
$40m-9$	$40m-23$
$40m-11$	$40m-37$
$40m-19$	$40m-13$

Theorema 34.

Numerorum in hac $aa+14bb$ vel hac $2aa+7bb$ forma contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel 7 vel in vna ſequentium formularum continentur

$56m+1$	$56m+3$
$56m+9$	$56m+27$
$56m+25$	$56m+19$
$56m+15$	$56m+5$
$56m+23$	$56m+45$
$56m+39$	$66m+13$

Theorema 35.

Numeri primi in priori harum formularum columna contenti ſimul ſunt numeri vel huius $aa+14bb$ vel $2aa$ $+7$

$+7bb$ formae, qui autem in altera columna continentur, eorum tripla demum in altera iſtarum formularum comprehenduntur.

Theorema 36.

Si in ſuperioribus formulis ſigna $+$ in $-$ commutentur, tum nullus numerus in iſtis formulis contentus diuiſor erit vel formae $aa+14bb$ vel $2aa+7bb$.

Theorema 37.

Numerorum in hac $aa+15bb$ vel hac $3aa+5bb$ forma contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel 3 vel 5 vel in vna ſequentium formularum continentur

		vel harum 4
$60m+1$	$60m+31$	$30m+1$
$60m+17$	$60m+47$	$30m+17$
$60m+19$	$60m+49$	$30m+19$
$60m+23$	$60m+53$	$30m+23$

Theorema 38.

Numerorum in hac $aa+21bb$ vel hac $3aa+7bb$ forma contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel 3 vel 7, vel in vna ſequentium formularum continentur.

$84m+1$,	$84m+5$
$84m+25$,	$84m+41$
$84m+37$,	$84m+17$
$84m+55$,	$84m+11$
$84m+31$,	$84m+23$
$84m+19$,	$84m+71$

Theorema 39.

Numerorum in hac $aa + 35bb$ vel $5aa + 7bb$ forma contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel 5 vel 7, vel in vna ſequentium formularum continentur.

		vel harum
$140m + 1$,	$140m + 3$	$70m + 1$
$140m + 9$,	$140m + 27$	$70m + 3$
$140m + 81$,	$140m + 103$	$70m + 9$
$140m + 29$,	$140m + 87$	$70m + 11$
$140m + 121$,	$140m + 83$	$70m + 13$
$140m + 109$,	$140m + 47$	$70m + 17$
$140m + 11$,	$140m + 33$	$70m + 27$
$140m + 99$,	$140m + 17$	$70m + 29$
$140m + 51$,	$140m + 13$	$70m + 33$
$140m + 39$,	$140m + 117$	$70m + 39$
$140m + 71$,	$140m + 73$	$70m + 47$
$140m + 79$,	$140m + 97$	$70m + 51$

Theorema 40.

Numerorum in aliqua harum formularum contentorum

$$aa + 30bb;\quad 2aa + 15bb$$

$$3aa + 10bb;\quad 5aa + 6bb$$

diuiſores primi omnes ſunt vel 2, vel 3, vel 5, vel in vna ſequentium formularum continentur.

$120m + 1$;	$120m + 11$
$120m + 13$;	$120m + 23$
$120m + 49$;	$120m + 59$
$120m + 37$;	$120m + 47$

120

$120m + 17$; $120m + 67$
$120m + 101$; $120m + 31$
$120m + 113$; $120m + 43$
$120m + 29$; $120m + 79$

Theoremata haec ſufficiunt ad ſequentes annotationes formandas, ex quibus natura diuiſorum huiusmodi formularum $paa + qbb$ penitius perſpicietur.

Annotatio 1.

Formula $paa + qbb$ nullum habet diuiſorem, quin ſit ſimul diuiſor formulae $aa + pqbb$. Cuius quidem rei ratio facile patet; nam qui numerus eſt diuiſor formulae $paa + qbb$, idem diuidet hanc formam $ppaa + pqbb$, hoc eſt hanc $aa + pqbb$, poſito a loco pa. Hancobrem ſufficiet iſtam vnicam formam $aa + Nbb$ conſideraſſe, quippe quae ratione diuiſorum hanc $paa + qbb$ in ſe complectitur.

Annotatio 2.

Inter numeros primos, qui vllum numerum in hac formula $aa + Nbb$ contentum diuidunt, primum occurrit binarius. Si enim N ſit numerus impar, ſumendis pro a et b numeris imparibus, formula $aa + Nbb$ fiet per 2 diuiſibilis: et ſi N ſit numerus par, ſumto a pari formula quoque per 2 ſit diuiſibilis. Deinde vero ipſe numerus N vel quaelibet eius pars aliquota poterit eſſe diviſor formulae $aa + Nbb$, quod ſumendo $a = N$ eſt perſpicuum.

Annotatio 3.

Reliqui diuiſores primi omnes formulae $aa + Nbb$ in iſtiusmodi expreſſionibus $4Nm + \alpha$ comprehendi poſſunt

 ita,

ita, vt etiam viciſſim omnes numeri primi in formis iſtis $4Nm+\alpha$ contenti ſimul ſint diuiſores formulae $aa+Nbb$. Praeterea ſi expreſſio $4Nm+\alpha$ praebeat diuiſores formulae $aa+Nbb$, tum nullus numerus huiusmodi $4Nm-\alpha$ poterit eſſe diuiſor vllius numeri in formula $aa+Nbb$ contenti.

Annotatio 4.

Habebit autem α certos quosdam valores, qui ab indole numeri N pendebunt; ac ſemper quidem vnitas erit vnus ex valoribus ipſius α. Tum vero, quia de numeris primis in formula $4Nm+\alpha$ contentis quaeſtio eſt, perſpicuum eſt neque vllum numerum parem, neque vllum numerum, qui cum N communem habeat diuiſorem, valorem ipſius α conſtituere poſſe.

Annotatio 5.

Valores autem ipſius α omnes erunt minores quam 4N, ſi enim qui eſſent maiores, per diminutionem numeri m minores, quam 4N, reddi poſſent. Hinc valores ipſius α erunt numeri impares minores, quam 4N, atque ad N primi. Neque vero omnes iſtiusmodi numeri impares ad N primi idoneos pro α valores exhibebunt, ſed eorum ſemiſſis ab hoc officio excluditur, quoniam, ſi x fuerit valor ipſius α, tum $-x$ ſeu $4N-x$ eius valor eſſe nequit; viciſſimque ſi x non fuerit valor ipſius α, tum $4N-x$ certo eius valor ſit futurus.

Annotatio 6.

Numerus igitur valorum ipſius α, ita vt $4Nm+\alpha$ contineat omnes diuiſores primos formulae $aa+Nbb$, ſequenti modo definietur. Sint p, q, r, s, cet. numeri

primi

primi inter ſe diuerſi, excepto binario, qui ſeorſim eſt conſiderandus; atque

ſi fuerit	erit valorum ipſius α numerus
$N = 1$	1
$N = 2$	2
$N = p$	$p-1$
$N = 2p$	$2(p-1)$
$N = pq$	$(p-1)(q-1)$
$N = 2pq$	$2(p-1)(q-1)$
$N = pqr$	$(p-1)(q-1)(r-1)$
$N = 2pqr$	$2(p-1)(q-1)(r-1)$
etc.	

Annotatio 7.

Quemadmodum autem vnitas ſemper reperitur inter valores ipſius α, ita etiam quiuis numerus quadratus impar et primus ad N locum habere debet in valoribus ipſius α. Poſito enim b numero pari $2c$, formula fiet $aa + 4Ncc$, quae, ſi ſit numerus primus, contineri debet in expreſſione $4Nm + \alpha$. Ergo α erit aa vel reſiduum, quod ex diuiſione ipſius aa per $4N$ remanet. Simili modo inter valores ipſius α reperiri debent omnes numeri $aa + N$, vel quae ex eorum per $4N$ diuiſione ſupererunt reſidua; poſito enim $b = 2c + 1$ fiet $aa + Nbb = aa + N + 4N(cc + c)$, qui, ſi fuerit numerus primus, debebit $aa + N$ eſſe valor ipſius α.

Annotatio 8.

Intelligitur etiam, ſi x fuerit valor ipſius α, tum quoque xx (quod quidem ex praecedente patet) et omnes omnino poteſtates ipſius x, puta x^{μ} inter valores ipſius α lo-

cum habere debere. Deinde, ſi praeter x quoque y fuerit valor ipſius α, tum quoque xy et generaliter $x^{\mu} y^{\nu}$ dabit quoque valorem ipſius α. Scilicet ſi $x^{\mu} y^{\nu}$ maius fuerit quam $4N$, per hoc diuidatur et reſiduum erit valor ipſius α. Simili modo, ſi inſuper z fuerit valor ipſius α, tum etiam $x^{\mu} y^{\nu} z^{\xi}$ erit valor ipſius α. Hincque ex cognito vno vel aliquot valoribus ipſius α facili negotio omnes omnino eius valores inueniuntur.

Annotatio 9.

Sit x quicunque numerus primus ad $4N$, eoque minor, atque vel $+x$ vel $-x$ valor erit ipſius α. Si igitur fuerit x numerus primus, ex ſequenti tabula intelligetur, quibus caſibus $+x$, quibusque $-x$ valorem ipſius α praebeat

Si	erit
$N = 3n - 1$	$\alpha = +3$
$N = 3n +$	$\alpha = -3$
ſi $N = \begin{cases} 5n+1 \\ 5n+4 \end{cases}$	$\alpha = +5$
$N = \begin{cases} 5n+2 \\ n+ \end{cases}$	$\alpha = -5$
$N = \begin{cases} 7n+ \\ 7n+ \\ 7n+6 \end{cases}$	$\alpha = +7$
$N = \begin{cases} 7n+ \\ 7n+ \\ n+ \end{cases}$	$\alpha = -7$
$N = \begin{cases} 11n+2 \\ 11n+ \\ 1n+ \\ 11n+ \\ 11n+10 \end{cases}$	$\alpha = +11$
$N = \begin{cases} 11n+1 \\ 11n+ \\ 11n+ \\ 11n+ \\ 11n+9 \end{cases}$	$\alpha = -11$

Si propoſitus ſit numerus quicunque primus, qui vtrum ſigno $+$ an $-$ affectus valorem ipſius α praebeat, ita inueſtigabitur. Bini caſus debent euolui, alter, quo propoſitus numerus primus eſt formae $4u+1$, alter quo eſt formae $4u-1$. Priori caſu erit $\alpha = +(4u+1)$ ſi fuerit $N = (4u+1)n + tt$, at $\alpha = -(4u+1)$, ſi fuerit $N = (4u+1)n + tt$. Poſteriori caſu autem erit $\alpha = +(4u-1)$ ſi ſit $N = (4u-1)n + tt$ at $\alpha = -(4u-1)$ ſi $N = (4u-1)n + tt$.

Vbi

Vbi notandum eſt, quemadmodum ſignum $=$ aequalitatem denotat, ita ſignum $\neq$ aequalitatis impoſſibilitatem deſignare Quod ſi autem fuerit pro vtroque caſu $N = (4u \pm 1)n + s$, erit quoque $N = (4u \pm 1)n + s^\nu$, denotante ν numerum quemcunque integrum, vnde iſta tabella pro quibusuis numeris primis ſine negotio conſtruitur.

Annotatio 10.

Quoniam inter formas diuiſorum primorum ipſius $aa + Nbb$ habetur $4Nm + 1$, eadem expreſſio $aa + Nbb$ per nullum numerum diuidi poterit, qui contineatur in hac forma $4Nm - 1$. Simili modo cum $4Nm + tt$ exhibeat formam diuiſorum expreſſionis $aa + Nbb$, ſequitur nullum numerum huiusmodi $4Nm - tt$ poſſe eſſe diuiſorem vllius numeri in hac forma $aa + Nbb$ contenti, ſi quidem quod ſemper pono a et b ſint numeri inter ſe primi. Hinc ob rem impoſſibilis erit iſta aequatio $(4Nm - tt)u = aa + Nbb$, ideoque erit $4Nmu - ttu - Nbb \neq aa$, ſi quidem fuerint $4Nmu - ttu$ et Nbb numeri inter ſe primi, quod cum certo eueniat, ſi $b = 1$ et $t = 1$, nanciſcimur iſtud.

Conſectarium.

Nullus numerus hac formula $4abc - b - c$ contentus vnquam eſſe poteſt quadratus.

Annotatio 11.

Si fuerit N numerus huius formae $4n - 1$, tum formae diviſorum ad numerum duplo minorem rediguntur, ita vt in formulis huiusmodi $2Nm + \alpha$ comprehendantur. Scilicet ſi fuerit $4Nm + \alpha$ diuiſorum forma, tum quoque

4 N

$4Nm+2N+\alpha$ erit forma diuiſorum. Quare cum $2Nm+tt$ ſit forma diuiſorum, ſequitur nullum numerum $2Nm-tt$ diuiſorem eſſe poſſe formae $aa+Nbb$. Hinc erit $(2Nm-tt)u = aa+Nbb$, exiſtente $N=4n-1$, vnde oritur hoc.

Conſectarium.

Nullus numerus huius formae $2abc-b-c$, ſi vel b vel c fuerit numerus impar $4n-1$, vnquam poteſt eſſe quadratus.

Annotatio 12.

Si fuerit N numerus impar huiusmodi $4n+1$ vel etiam numerus impariter par, tum diuiſorum formae ad numerum duplo minorem redigi non poſſunt. Scilicet ſi $4Nm+\alpha$ fuerit diuiſor formae $aa+Nbb$ tum $4Nm+2N+\alpha$ eiusdem formae diuiſor eſſe non poterit. Hinc $2(2m+1)N+tt$ non erit diuiſor formae $aa-Nbb$, ideoque haec aequatio $(2(2m+1)N+tt)u=aa+Nbb$ erit aequatio impoſſibilis, ſi quidem ſint a et b numeri primi inter ſe: et N ſit vel numetus impar formae $4n+1$ vel numerus impariter par. Ex quo ſequitur iſtud.

Conſectarium.

Nullus numerus huius formae $2abc-b+c$, exiſtente a numero impari, et b vel impariter pari vel impari formae $4n+1$, vnquam eſſe poteſt quadratus.

Scholion 1.

Quae hic ſunt allata ſufficienter declarant indolem diuiſorum huiusmodi formularum $aa+Nbb$, ſimulque inſer-

viunt

viunt ad omnes diuiſorum formas expedite inueniendas, quibus cognitis quoque eae numerorum formae innoteſcunt, quae nunquam prebere queant diuiſores formulae $aa+N bb$. Cum igitu haec pateant ad omnes valores ipſius N, ſiue ſint numerir primi, ſiue compoſiti; reliquum eſt, vt etiam caſus euoluamus, quibus N denotet numeros negatiuos tam primos quam compoſitos; perſpicuum autem eſt formulam $paa-qbb$ nullum diuiſorem habere poſſe, quin ſit diuiſor huius $aa-pqbb$ ſeu $pqaa-bb$, vnde ſufficiet huiusmodi tantum formas $aa-Nbb$ euoluiſſe.

Theorema 41.

Numerorum in hac forma $aa-bb$ contentorum diuiſores primi omnes ſunt vel 2 vel $4m+1$, nullus ſcilicet datur numerus, qui non ſit diuiſor differentiae duorum quadratorum. Viciſſim autem omnes numeri, praeter impariter pares, ipſi ſunt differentiae duorum quadratorum.

Theorema 42.

Numerorum in hac forma $aa-2bb$ contentorum omnes diuiſores primi ſunt vel 2 vel huius formae $8m+1$. Omnesque numeri primi huius formae $8m+1$ ipſi infinitis modis in formula $aa-2bb$ continentur.

Theorema 43.

Numerorum in hac forma contentorum $aa-3bb$ omnes diuiſores primi ſunt vel 2 vel 3 vel huius formae $12m+1$. Atque viciſſim omnes huiusmodi numeri primi ſimul in hac $aa-3bb$ vel hac $3aa-bb$ forma infinitis modis continentur.

Theorema 44.

Omnes diuiſores primi huius formae $aa-5bb$ ſunt vel 2 vel 5 vel continentur.

in altera harum formularum	vel in hac vna
$20m\pm1$, $20m\pm9$	$10m\pm1$.

Omneſque numeri primi in his formis contenti ſimul ſunt diuiſores formae $aa-5bb$.

Theorema 45.

Omnes diuiſores primi huius formae $aa-7bb$ ſunt vel 2 vel 7 vel in vna ſequentium formularum continentur

$$28m\pm1;\ 28m\pm3;\ 28m\pm9$$

atque viciſſim omnes numeri primi in his formis contenti ſimul ſunt diuiſores formae $aa-7bb$.

Theorema 46.

Omnes diuiſores primi huius formae $aa-11bb$ ſunt vel 2 vel 11 vel in vna ſequentium formarum continentur

$$44m\pm1;\ 44m\pm5;\ 44m\pm7;\ 44m\pm9;\ 44m\pm19$$

atque viciſſim omnes numeri primi in his formulis contenti ſimul ſunt diuiſores formae $aa-11bb$, quae reciprocatio in omnibus ſequentibus theorematis locum habet.

Theorema 47.

Omnes diuiſores primi formae $aa-13bb$ ſunt vel 2 vel 13 vel in ſequentibus formulis continentur:

		quae reuocantur ad has
$52m \pm 1$;	$52m \pm 3$	$26m \pm 1$
$52m \pm 9$;	$52m \pm 25$	$26m \pm 3$
$52m \pm 23$;	$52m \pm 17$	$26m \pm 9$

Theorema 48.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 17bb$ ſunt vel 2 vel 17, vel in ſequentibus formulis continentur:

		quae revocantur ad has
$68m \pm 1$;	$68m \pm 9$	$34m \pm 1$
$68m \pm 13$;	$68m \pm 19$	$34m \pm 9$
$68m \pm 33$;	$68m \pm 25$	$34m \pm 13$
$68m \pm 21$;	$68m \pm 15$	$34m \pm 15$

Theorema 49.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 19bb$ ſunt vel 2 vel 19 vel in ſequentibus formulis continentur

$76m \pm 1$;	$76m \pm 3$;	$76m \pm 9$
$76m \pm 27$;	$76m \pm 5$;	$76m \pm 15$
$76m \pm 31$;	$76m \pm 17$;	$76m \pm 25$

Theorema 50.

Omnes diuiſores primi numerorum formae huius $aa - 6bb$ ſunt vel 2 vel 3 vel in his formulis continentur:

$24m \pm 1$; $24m \pm 5$;

Theorema 51.

Omnes diuiſores primi numerorum formae $aa - 10bb$ ſunt vel 2 vel 5 vel in his formulis continentur:

$40m \pm 1$; $40m \pm 3$
$40m \pm 9$; $40m \pm 13$

Theorema 52.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 14bb$ ſint vel 2 vel 7 vel in his formulis continentur:

$56m \pm 1$; $56m \pm 5$; $56m \pm 25$
$56m \pm 13$; $56m \pm 9$; $56m \pm 11$

Theorema 53.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 22bb$ ſint vel 2 vel 11 vel in his formulis continentur:

$88m \pm 1$; $88m \pm 3$; $88m \pm 9$;
$88m \pm 27$; $88m \pm 7$; $88m \pm 21$;
$88m \pm 25$; $88m \pm 13$; $88m \pm 39$;
$88m \pm 29$.

Theorema 54.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 15bb$ ſint vel 2 vel 3 vel 5 vel in his formulis continentur:

$60m \pm 1$; $60m \pm 7$; $60m \pm 11$; $60m \pm 17$.

Theorema 55.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 21bb$ ſint vel 2 vel 3 vel 7 vel in his formis continentur:

		quae reuocantur ad has
$84m \pm 1$;	$84m \pm 5$	$42m \pm 1$
$84m \pm 25$;	$84m \pm 41$	$42m \pm 5$
$84m \pm 37$;	$84m \pm 17$	$42m \pm 17$

Theo-

Theorema 56.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 33\,bb$ ſunt vel 2 vel 3, vel 11 vel in his formulis continentur:

		quae reuocantur ad has
$132m \pm 1$;	$132m \pm 17$	$66m \pm 1$
$132m \pm 25$;	$132m \pm 29$	$66m \pm 17$
$132m \pm 35$;	$132m \pm 65$	$66m \pm 25$
$132m \pm 49$;	$132m \pm 41$	$66m \pm 29$
$132m \pm 37$;	$132m \pm 31$	$66m \pm 31$

Theorema 57.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 35\,bb$ ſunt vel 2 vel 5 vel 7 vel in his formulis continentur:

$140m \pm 1$;	$140m \pm 9$;	$140m \pm 59$
$140m \pm 29$;	$140m \pm 19$;	$140m \pm 31$
$140m \pm 13$;	$140m \pm 23$;	$140m \pm 67$
$140m \pm 43$;	$140m \pm 33$;	$140m \pm 17$

Theorema 58.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 30\,bb$ ſunt vel 2 vel 3 vel 5 vel in his formulis continentur

$120m \pm 1$;	$120m \pm 13$;	$120m \pm 49$
$120m \pm 37$;	$120m \pm 7$;	$120m \pm 29$
$120m \pm 17$;	$120m \pm 19$;	

Theorema 59.

Omnes diuiſores primi numerorum huius formae $aa - 105\,bb$ ſunt vel 2 vel 3 vel 5 vel 7 vel continentur in his formulis.

		quae reuocantur ad has
$420m \pm 1.$	; $420m \pm 13$	$210m \pm 1$
$420m \pm 169$	; $420m \pm 97$	$210m \pm 13$
$420m \pm 23$	; $420m \pm 121$	$210m \pm 23$
$420m \pm 107$	; $420m \pm 131$	$210m \pm 41$
$420m \pm 109$	; $420m \pm 157$	$210m \pm 53$
$420m \pm 59$	; $420m \pm 73$	$210m \pm 59$
$420m \pm 101$	; $420m \pm 53$	$210m \pm 73$
$420m \pm 151$	; $420m \pm 137$	$210m \pm 79$
$420m \pm 89$	; $420m \pm 103$	$210m \pm 89$
$420m \pm 79$	; $420m \pm 187$	$210m \pm 97$
$420m \pm 41$	; $420m \pm 113$	$210m \pm 101$
$420m \pm 209.$	; $420m \pm 197$	$201m \pm 103$

Annotatio 13.

Numerorum ergo in formula $aa - Nbb$ contentorum diviſores primi omnes ſunt vel 2, vel diuiſores numeri N vel in eiusmodi formulis $4Nm \pm \alpha$ comprehenduntur. Quodſi enim $4Nm + \alpha$ fuerit forma diuiſorum, tum quoque $4Nm - \alpha$ erit diuiſorum forma: ſecus atque in formulis $aa + Nbb$, quarum ſi $4Nm + \alpha$ fuerit diuiſor tum $4Nm - \alpha$ nullum vnquam praebere poteſt diuiſorem eiusdem formulae.

Annotatio 14.

Poſita ergo $4Nm \pm \alpha$ pro forma diuiſorum generali numerorum in hac expreſſione $aa - Nbb$ contentorum, littera α plerumque plures ſignificabit numeros; inter quos vnitas ſemper continetur, tum vero quia hic de diuiſoribus primis ſermo eſt inter valores ipſius α nullus erit numerus

merus par nec vllus diuiſor numeri N. Deinde etiam manifeſtum eſt, omnes valores ipſius α ita ordinari poſſe, vt ſint minores quam $2N$. Si enim ſit $4Nm+2N+b$ diuiſor, tum poſito $m-1$ loco m, diuiſor erit $4Nm-(2N-b)$. Erunt ergo valores ipſius α numeri impares primi ad N, minores quam $2N$, horumque numerorum omnium imparium et primorum ad N et minorum, quam $2N$, ſemiſſis tantum praebebit idoneos valores ipſius α, reliqui exhibebunt formulas, in quibus plane nullus continetur diuiſor. Perpetuo ſcilicet totidem habebuntur formulae diuiſorum, quot ſint contrariae, ſolo excepto caſu, quo $N=1$.

Annotatio 15.

Quod ad numerum valorum ipſius α pro formula diuiſorum $4Nm\pm\alpha$ attinet, quoniam ob ſignum ambiguum quaeuis formula eſt duplex, hic quoque eadem valebit regula, quam ſupra annot. 6. dedi. Sic in vltimo theoremate, quo erat $N=105=3, 5, 7$, numerus valorum ipſius α erit $=2, 4, 6=48$, ſeu cum quaeuis formula ſit gemina, numerus formularum ſit 24, quot etiam exhibuimus.

Annotatio 16.

Sicut autem vnitas perpetuo inter valores ipſius α reperitur, ita etiam quiuis numerus quadratus, qui ſit primus ad $4N$, valorem idoneum pro α ſuppeditabit. Poſito enim $b=2c$, formula $aa-Nbb$ abit in $aa-4Ncc$ ſeu $4Ncc-aa$, ex quo patet quemuis numerum quadratum aa, qui ſit primus ad $4N$, exhibere valorem idoneum pro α, ſumendo ſcilicet reſiduo, quod in diuiſione ipſius aa per

4 N

4 N remanet. Simili modo ponendo $b = 2c + 1$, formula $Nbb - aa$ abit in $4N(cc + c) + N - aa$, vnde etiam omnes numeri $N - aa$ ſeu $aa - N$, qui quidem ſint primi ad 4 N, idoneos valores pro α praebebunt. Deinde quoque notandum eſt, ſi ſint x, y, z, valores ipſius α, tum quoque x^μ, y^ν, z^ζ itemque omnia producta, quae ex numeris x, y, z eorumue poteſtatibus quibuscunque reſultant, valores ipſius α eſſe exhibitura; vnde cognito vno vel aliquot valoribus ipſius α facili negotio omnes reperiuntur.

Annotatio 17.

Quo autem clarius appareat, cuiusmodi valores littera α perpetuo ſit habitura, tabulam ſequentem adiicere viſum eſt, ſimilem eius, quae annot. 9. habetur.

Erit ſcilicet	ſi fuerit
$\alpha = 3$	$N = 3n + 1$
$\alpha \neq 3$	$N = 3n - 1$
$\alpha = 5$	$N = 5n \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$
$\alpha \neq 5$	$N = 5n \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$
$\alpha = 7$	$N = 7n \begin{cases} +1 \\ +2 \\ -3 \end{cases}$
$\alpha \neq 7$	$N = 7n \begin{cases} -1 \\ -2 \\ +3 \end{cases}$
$\alpha = 11$	$N = 11n \begin{cases} +1 \\ -2 \\ +3 \\ +4 \\ +5 \end{cases}$
$\alpha \neq 11$	$N = 11n \begin{cases} -1 \\ +2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{cases}$

$\alpha = 13$

$\alpha = 13 \;\Big|\; N = 13n \begin{cases} +1 \\ -1 \\ +3 \\ -3 \\ +4 \\ -4 \end{cases}$

$\alpha \neq 13 \;\Big|\; N = 13n \begin{cases} +2 \\ -2 \\ +5 \\ -5 \\ +6 \\ -6 \end{cases}$

Annotatio 18.

Ex hac igitur tabula numeri primi, qui idoneos valores pro α praebeant, facile dignoſci ſimulque inepti reiici poſſunt. Propoſito ſcilicet numero primo p, omnes numeri quadrati in huiusmodi formulis $pn + \theta$: comprehendi poſſunt, quae prodeunt ponendo pro θ numeros quadratos, ſeu reſidua, quae ex diuiſione quadratorum per p remanent. Quare ſi N fuerit huiusmodi numerus $pn + tt$, tum inter formas diuiſorum $4Nm \pm \alpha$ formulae $aa - Nbb$ ſeu $Nbb - aa$, habebitur $\alpha = p$, ſin autem numerus N non contineatur in forma $pn + tt$, tum nullus numerus in formula hac $4Nm \pm p$ contentus poterit eſſe diuiſor vllius numeri huius formae $aa - Nbb$.

Annotatio 19.

Si fuerit N numerus impar formae $4n + 1$ tum expreſſionis $aa - Nbb$ diuiſorum formae $4Nm \pm \alpha$ ad duplo pauciores reduci poſſunt, ita vt exhiberi poſſint hoc modo: $2Nm \pm \alpha$. Hoc ſcilicet caſu, ſi $4Nm \pm \alpha$ fuerit forma diuiſorum, tum quoque $4Nm \pm (2N - \alpha)$ erit diuiſorum forma, ſic cum caſu $N = 13$, vna diuiſorum formulae $aa - 13bb$ forma eſſet $52m \pm 3$, erit quoque $52m \pm 23$ forma diuiſorum.

Annotatio. 20.

Sin autem fuerit N vel numerus impariter par, vel numeru impar formae $4n-1$ tum iſta formarum diuidentium reductio ad duplo pauciores non ſuccedit. Scilicet ſi hoc caſu formulae $aa-Nbb$ fuerit $4Nm+\alpha$ diuiſorum forma, tum $4Nm+(2N-\alpha)$ talis non erit, hoc eſt: nullus numerus in forma $2(2m+1)N+\alpha$ contentus erit diuiſor vllius numeri huiusmodi $aa-Nbb$. Poſito ergo $\alpha=tt$, erit

$$(2(2m+1)N+tt)u \neq aa-Nbb.$$

Vnde conſequimur ſequens.

Conſectarium.

Nullus numerus in hac forma $2abc+c+b$ contentus vnquam poteſt eſſe quadratus, ſi quidem fuerit a numerus impar, et b numerus ſeu impariter par, ſeu impar huius formae $4n-1$.

Scholion 2.

Huiusmodi formulae magis ſpeciales, quae nunquam quadrata fieri queant, innumerabiles ſuperioribus deduci poſſunt. Conſideremus enim priorum formam $aa+Nbb$, ſitque $4Nm+A$ eiusmodi formula, vt nullus numerus in ea contentus poſſit eſſe diuiſor formae $aa+Nbb$. Erit ergo $aa+Nbb \neq (4Nm+A)u$, denotante hoc ſigno $\neq$ aequationem impoſſibilem, ex quo oritur $aa \neq 4Nmu+Au-Nbb$. Sit $b=Ac$ fiet $aa \neq 4Nmu+Au-NAAcc$. Ponatur porro $u=NAcc+d$, eritque $aa \neq 4NNAmcc+4Nmd+Ad$. Sit $d=4NNn$ erit $aa \neq 16N^3mn+4NNAmcc+4NNAn$. Diuidatur haec

haec formula per quadratum $4NN$ ac ponatur $c = 1$ eritque $4Nmn + Am + An$ formula, quae nunquam poterit eſſe quadratum, ſi quidem forma $aa + Nbb$ non poſſit diuidi per vllum numerum in hac formula $4Nm + A$ contentum. Ex ſuperioribus ergo theorematis colligimus nullum numerum, qui in vna ſequentium expreſſionum contineatur, fieri poſſe quadratum.

$4mn - (m+n)$	$4mn + 3(m+n)$
$8mn - (m+n)$	$8mn + 7(m+n)$
$8mn - 3(m+n)$	$8mn + 5(m+n)$
$12mn - (m+n)$	$12mn + 11(m+n)$
$12mn - 7(m+n)$	$12mn + 5(m+n)$
$20mn - (m+n)$	$20mn + 19(m+n)$
$20mn - 3(m+n)$	$20mn + 17(m+n)$
$20mn - 7(m+n)$	$20mn + 13(m+n)$
$20mn - 9(m+n)$	$20mn + 11(m+n)$
$24mn - (m+n)$;	$24mn + 23(m+n)$
$24mn - 5(m+n)$;	$24mn + 19(m+n)$
$24mn - 7(m+n)$;	$24mn + 17(m+n)$
$24mn - 11(m+n)$;	$24mn + 13(m+n)$
$28mn - (m+n)$;	$28mn + 27(m+n)$
$28mn - 9(m+n)$;	$28mn + 19(m+n)$
$28mn - 11(m+n)$;	$28mn + 17(m+n)$
$28mn - 15(m+n)$;	$28mn + 13(m+n)$
$28mn - 23(m+n)$;	$28mn + 5(m+n)$
$28mn - 25(m+n)$;	$28mn + 3(m+n)$

cet.

Notandum autem eſt in formulis alterius columnae numeros m et n reſpectu coefficientis ipſius $m+n$ primos eſſe oportere. Hanc reſtrictionem requirit ea conditio, quam initio ſtabiliui-

biliuimus, vt in forma $aa+Nbb$ numeri a et b ſint inter ſe numeri primi: niſi enim haec conditio obſeruetur, quilibet numerus poſſet eſſe diuiſor iſtius formae. Ceterum hac conditione obſeruata ex praecedentibus perſpicuum eſt, ſi $4Nmn-A(m+n)$ quadratum eſſe nequeat, tum quoque hanc latius patentem $4Nmn-A(m+n)\pm 4Np(m+n)$ quadratum eſſe non poſſe.

Scholion 3.

Contemplemur iam expreſſionem $aa-Nbb$ cuius nullus diuiſor contineatur in formula hac $4Nm\pm A$. Erit ergo $aa-Nbb=4Nmu\pm Au$ ſeu $aa=4Nmu+NAA\pm Au$. Ponatur $NA\pm u=d$, ſeu $u=\pm d\mp NA$, eritque $aa=\pm 4Nmd\mp 4NNAm\pm Ad$, ſit $d=\pm 4NNn$ fietque $16N^2mn\mp 4NNAm\pm 4NNAn=aa$, vnde patet nullum numerum contentum in hac formula $4Nmn\pm A(m-n)$ quadratum eſſe poſſe. Neque ergo etiam vllus numerus in hac expreſſione $4Nmn\pm A(m-n)\pm 4Np(m-n)$ contentus quadratum eſſe poterit, ſi modo conditio ante memorata obſeruetur, vt a et b ſint numeri inter ſe primi. Hinc itaque ex theorematis poſterioribus deducuntur ſequentes formulae, quae nunquam numeros quadratos praebere poſſunt.

$8mn\pm 3(m-n)$; $8mn\pm 5(m-n)$
$12mn\pm 5(m-n)$; $12mn\pm 7(m-n)$
$20mn\pm 3(m-n)$; $20mn\pm 17(m-n)$
$20mn\pm 7(m-n)$; $20mn\pm 13(m-n)$
$24mn\pm 7(m-n)$; $24mn\pm 17(m-n)$
$24mn\pm 11(m-n)$; $24mn\pm 13(m-n)$

$$28mn \pm 5\,(m-n);\quad 28mn \pm 23\,(m-n)$$
$$28mn \pm 11\,(m-n);\quad 28mn \pm 17\,(m-n)$$
$$28mn \pm 13\,(m-n);\quad 28mn \pm 15\,(m-n)$$

cet.

attendenti autem facile patebit ambos numeros m et n reſpectu coefficientis ipſius $(m-n)$ primos eſſe debere: alioquin enim, ſi verbi gratia in formula $12mn \pm 5(m-n)$ poneretur $m = 5p$ et $n = 5q$, prodiret $12.25\,pq \pm 25(p-q)$, neque adeo haec formula $12pq \pm (p-q)$ quadratum eſſe poſſet, quod tamen eſt falſum.

DE MOTV CORPORVM FLEXIBILIVM.

Argumentum, quod hic pertractandum ſuſcipio, inſignem mechanicae partem conſtituit, cum enim hac ſcientia cunctorum corporum motus, tam quales permaneant, quam quomodo a potentiis immutentur, inueſtigari debeant, ex diuerſa corporum indole primaria tractationis diuiſio originem trahit. Hinc corpora flexibilia, quorum ſtructura ita eſt comparata, vt partes inflecti queant, ad peculiarem mechanicae partem referri debebunt, quae, etſi alias vniuerſa motus ſcientia iam ſatis exculta videatur, tamen ne ad hoc vsque tempus quidem a quoquam eſt tentata, ita vt etiam prima principia, ex quibus corporum flexibilium motus definiri debeat, adhuc ignorentur. Quanquam enim Celeberrimus Daniel Bernoulli et ego motum oſcillatorium huiusmodi corporum feliciter explicauimus, tamen quia tantum oſcillationes minimas ſumus contemplati, ipſis genuinis principiis, quibus corporum flexibilium motus continetur, carere poteramus, cum principia ſtatica eſſent ſufficientia. Quoniam igitur hoc argumentum plane eſt nouum atque adhuc intactum, caſus tantum nonnullos ſimpliciſſimos euoluam, vt principia horum motuum in medium proferantur, ſimulque methodus tradatur, qua omnia huius generis problemata reſolui conueniat. Methodo igitur mathematicis conſueta, quae in hanc rem ſum meditatus, ordine proponam.

Defi-

Definitio

1. Flexura eſt eiusmodi duorum corporis partium AB et BC connexio in B, ita vt vtraque pars circa hoc punctum B liberrime inflecti atque rotari poſſit. Tab. II. fig. 2.

Scholion

2. Flexura ſcilicet B tantum diuulſioni partium AB et BC reſiſtit, de cetero autem non impedit, quo minus ambae partes ad quemcunque angulum inter ſe ABC vel AB inclinentur. Quando autem dico, partes liberrime inflecti poſſe, hanc flexuram perfectam, de qua hic loquor, a flexura elaſtica diſtinguo; ad partes enim circa flexuram perfectam inflectendas tantum opus eſt, vt inertia partis mouendae ſuperetur, cum ſi flexura eſſet elaſtica, praeterea elater ſuperari deberet. Huiusmodi flexura perfecta producitur, ſi duo corpora ope fili colligantur; quod quidem cuique eſt notum, corpora autem circa flexuram ſatis gracilia eſſe oportet, vt ne nimis craſſa figura inflectionem impediat. Hancobrem hic partes per flexuram inter ſe connexas tanquam lineas rectas repraeſentabo, quod tamen non impediat, quo minus quaecunquae figurae, dummodo ſint idoneae, in earum linearum rectarum locum mente ſubſtituantur.

Corollar. 1.

3. Ex hac definitione proprie intelligitur, quid ſit corpus vnica flexura praeditum; quippe quod conſtat duabus partibus rigidis AB et BC per flexuram B inter ſe connexis.

Corol-

Corollar. 2.

Tab. II. fig. 3. 4. Hinc vero ſimul colligitur, corpora duabus pluribusue flexuris praedita conſtare ex pluribus partibus rigidis AB, BC, CD, cet. quarum binae quaeque contiguae ope flexurae, vti in B et C, ſint connexae.

Corollar. 3.

5. Si longitudines partium rigidarum euaneſcant, ſeu fiant quam minimae, numerusque flexurarum in infinitum excreſcat, tum perſpicuum eſt, huiusmodi corpus filum ſeu funem ſeu catenam perfecte flexilem eſſe exhibiturum.

Theorema

6. Si corporis flexibilis ſingulis partibus aequales motus ſecundum eandem plagam imprimantur, tum totum corpus, quaſi eſſet rigidum, nullam inflexionem patietur, ſed eadem perpetua celeritate in eandem plagam moueri perget, niſi a cauſis externis in hoc motu perturbetur.

Demonſtratio.

Veritas huius propoſitionis ſequitur ex prima motus lege, qua omnia corpora motum, quem ſemel acceperunt, vniformiter in directum conſeruare conantur. Corporis igitur flexibilis, de quo ſermo eſt, ſingulae partes, ſi eſſent diſſolutae, motum impreſſum conſeruarent, at, quoniam omnibus partibus aequalis motus in eadem directione eſt impreſſus, puncta quae initio erant contigua, talia perpetuo manebunt ſicque flexuris per hunc motum impreſſum nulla vis infertur. Quamobrem quotcunque in corpore fuerint

fuerint flexurae, continuatio motus impreſſi nequaquam impeditur, ideoque corpus, tanquam eſſet rigidum, vniformiter in directum moueri perget. Q. E. D.

Corollar. 1.

7. Hoc igitur caſu, quo ſingulis corporis partibus motus aeque celeres ſecundum eandem directionem imprimuntur, ſine vlla difficultate perpetua motus continuatio definiri poteſt, niſi motus a viribus externis perturbetur.

Corollar. 2.

8. Quando autem ſingulis partibus diuerſi motus imprimuntur, ita, vt ſingulae ſuum motum conſeruare nequeant, quin ſimul in flexuris a ſeinuicem diſſoluantur, tum ob id ipſum, quod flexura diſſolutioni reſiſtit, motus partium perturbabuntur.

Corollar. 3.

9. Quo igitur appareat, vtrum per flexuram motus immutetur, concipiatur nexus omnis in flexuris tolli, ac diſpiciatur, vtrum, dum quaelibet pars motum ſibi impreſſum proſequitur, termini, qui ante in flexuris erant coniuncti, a ſe inuicem diſcedant, nec ne; priori enim caſu flexurae vis ſeſe in continendis partibus exerens, motum turbabit, altero vero caſu motum inuariatum relinquet.

Scholion.

10. Ad motum ergo cuiusque corporis flexibilis determinandum, ſingulae partes, quaſi inter ſe eſſent diſſolu-

tae, conſiderari, et quo motu promoueri pergant, examinari debebunt; tum vero flexurae cuiusque vis eſt inveſtiganda, quae ſingula motus ita moderetur, vt partes, vti natura poſtulat, contiguae conſeruentur, hocque modo ad quoduis momentum motus ſingularum corporis partium definietur. En ergo paucis verbis complexam totam methodum, qua in hoc negotio vti oportet; interim tamen in eius applicatione maxima obſtacula occurrunt, quae ſingulari circumſpectione remoueri debent. Maximum autem ſubſidium in hac inueſtigatione in eo verſatur, vt ille ipſe motus, qui quaeritur, modo quam commodiſſimo per ſymbola repraeſentetur; qua de re in ſequenti ſcholio ante omnia eſt explicandum.

Scholion 2.

11. Conſideremus primo corpora vnica flexura praedita, his enim pertractatis non admodum difficile erit ad plures flexuras methodum accommodare. Huiusmodi ergo corporis motus, vtcunque fuerit comparatus, mente comprehendetur atque intelligetur, ſi primo nouerimus motum, quo ipſa flexura progrediatur, hoc eſt, viam, quam deſcribit, atque eius celeritatem in ſingulis locis. Deinde ſi vtraque pars non motu ſibi parallelo flexuram ſequatur vtriusque motus rotatorius ſeu angularis circa ipſam flexuram debet cognoſci. Tandem ad quoduis tempus ſitus partium reſpectu plagae datae erit definiendus. Has autem res ſi in quouis motu oblato determinare atque aſſignare poterimus, tum dubium eſt nullum, quin totum corporis motum perfecte habeamus cognitum. Ad haec autem expedienda

pedienda primum opus eſt vt inueſtigemus, quemadmodum vtraque pars, ſi eſſet ab altera ſoluta, motum ſuum eſſet continuatura, deinde quomodo quaeuis potentia ſollicitans hunc motum ſit perturbatura. Denique ea flexurae vis eſt quaerenda, qua fiat, vt vtriusque partis terminus B aequo motu cieatur; ſicque vis, quam flexura ſuſtinet, ſeu qua ruptioni reſiſtit, innoteſcet, qua cognita vtriusque partis, atque adeo totius corporis motus ita determinabitur, vti ad eius perfectam cognitionem requiri oſtendimus.

Problema 1.

12. Si corporis flexibilis vtcunque moti vna pars ſubito a reliquarum nexu diſſoluatur, definire motum, quo iſta pars ſibi relicta promoueri perget.

Solutio.

Eo momento, quo pars BC ſoluitur, habeat punctum ſeu extremitas B motum ſecundum directionem BP cum celeritate debita altitudini $= v$, circa punctum B autem ipſa pars BC habuerit motum rotatorium, cuius celeritas angularis in data a puncto B diſtantia $= 1$ debita ſit altitudini $= q$, angulus vero CBP momento ſolutionis ſit $= \Phi$. Quo nunc huius motus continuatio facilius cognoſcatur, ponamus toti ſpatio motum imprimi aequalem et contrarium ei, quem punctum B momento ſolutionis habuerat; quo facto ſolus motus rotatorius circa punctum B in parte BC ſupererit. Conſideretur ergo huius partis centrum grauitatis, quod ſit in G, exiſtente $BG = g$, atque manifeſtum erit ex motu rotatorio cor- Tab. II. fig. 4.

A 2 2 poris

poris BC circa B centrum grauitatis G habiturum eſſe motum ſecundum directionem Gg ad BG normalem; cuius celeritas debita ſit altitudini $= ggq$. Per motus ergo legem generalem centrum grauitatis G hac ipſa celeritate promouebitur vniformiter in directum ſecundum directionem Gg: interea vero corpus BC circa hoc centrum grauitatis G gyrabitur eodem motu rotatorio, quem circa B momento ſolutionis habuerat ſcilicet huius motus celeritas angularis in diſtantia $= 1$ a centro G erit debita altitudini $= q$. Hocque ergo duplici motu, altero rectilineo centri grauitatis G, altero rotatorio circa idem centrum corpus vniformiter in infinitum promouebitur. Quodſi nunc toti ſpatio ille motus, quem ipſi impreſſum eſſe finximus, iterum dematur, per compoſitionem orietur motus verus, quem pars BC ſoluta habebit. Q. E. I.

Coroll. 1.

13. Primo ergo momento pars ſeu virga BC perveniet in ſitum bgc, ideoque ad rectam BP perinde inclinabitur, ac ſi circa punctum fixum B eſſet rotatum. Scilicet dum centrum grauitatis G abſoluit ſpatiolum $Gg = dx = g\,dt\sqrt{q}$, poſito dt pro elemento temporis, fiet $d\Phi = -dt\sqrt{q}$, ob angulum $PBG = \Phi$.

Coroll. 2.

14. Punctum autem B de recta OP transferetur in punctum b, ſumta $gb = BG$, et cum iſta translatio congruat cum effectu vis centrifugae, qua punctum B circa G rotatur, cuius celeritas eſt debita altitudini ggq, punctum

ctum B in b vrgebitur vi acceleratrice $= 2gq$, quae id ſecundam directionem BG ſollicitabit.

Coroll. 3.

15. Hinc punctum B perinde mouebitur, ac ſi ſollicitaretur a duabus viribus, quarum altera ſit tangentialis eius motum in directione BP accelerans vi $= 2gq$ coſ. Φ; altera vero normalis id a ſemita OP dextrorſum depellens vi $= 2gq$ ſin. Φ.

Problema 2.

16. Poſitis, quae ante, ſi inſuper pars BC ſtatim ac diſſoluitur, ſollicitetur a vi quacunque BR $=$ R, determinare motum, quo pars BCD primo ſaltem momento promoueri perget.

Solutio.

Retentis iisdem denominationibus, quibus ante ſumus vſi, ſit maſſa virgae BC $=$ B, eiusque momentum inertiae reſpectu centri grauitatis ſit $= nBgg$; angulus vero OBR ſit $= \omega$. Quo nunc appareat, quantum motus virgae BC ante definitus perturbetur a vi BR $=$ R, primum eius effectus in motu progreſſiuo centri grauitatis inueſtigari debet. Per leges autem, quas corpora rigida, ſi ſollicitantur, obſeruant, primo motus centri grauitatis retardabitur vi $= \frac{R}{B}$ ſin. $(\Phi - \omega)$, tum vero de motu rectilineo Gg retrahetur vi ſecundum GB agente $= \frac{R}{B}$ coſ. $(\Phi - \omega)$. Eadem vero potentia R, mentem a motu rotatorio abſtrahendo, punctum B vrgebitur, ita vt in motu ſuo ſecundum Bp retardetur vi $= \frac{R}{B}$ coſ. ω, tum vero ſiniſtrorſum vrgetur, vi normali $= \frac{R}{B}$ ſin. ω. At vero praeterea motus

rotatorius, accelerabitur vi B R $=$ R momento $= Rg$, ſin. $(\Phi-\omega)$ quod diuiſum per momentum inertiae $= nBgg$ dabit accelerationem in diſtantia $= 1$ a centro grauitatis, vnde erit $dq = \frac{-Rgd\Phi}{nBgg}$ ſin. $(\Phi-\omega) = \frac{Rdx}{nBgg}$ ſin. $(\Phi-\omega)$. Punctum ergo B in motu circa G rotatorio accelerabitur vi $= \frac{R}{nB}$ ſin. $(\Phi-\omega)$ ſecundum directionem ad B G normalem. Ergo punctum B in motu ſuo tangentiali B P retardatur vi $= \frac{R}{nB}$ ſin. $(\Phi-\omega)$ ſin. Φ, de recto autem tramite dextrorſum deflectitur vi $= \frac{R}{nB}$ ſin. $(\Phi-\omega)$ coſ. Φ. His coniunctis omnino punctum B ita mouebitur ac ſi ſollicitaretur primum ſecundum directionem motus ſui B P vi acceleratrice $= 2gq$ coſ. $\Phi - \frac{R}{B}$ coſ. $\omega - \frac{R}{nB}$ ſin. $(\Phi-\omega)$ ſin. Φ. Deinde vero dextrorſum deflectetur vi normali acceleratrice $= 2gq$ ſin. $\Phi - \frac{R}{B}$ ſin. $\omega + \frac{R}{Bn}$ ſin. $(\Phi-\omega)$ coſ. Φ. Ex his ergo formulis intelligitur motus, quo punctum B primo momento ſolutionis progredietur, praeterea vero mutatio motus rotatorii cognoſcitur, quoniam celeritas rotatoria in diſtantia a puncto B $= 1$, acceleratur vi $= \frac{R\,\text{ſin.}\,(\Phi-\omega)}{nBg}$. His autem cognitis problemati perfecte eſt ſatisfactum Q. E. I.

Corollar. 1.

17 Si igitur vis tangentialis motum puncti B accelerans ponatur $= T$, et vis normalis dextrorſum deflectens $= V$, habebuntur hae duae aequationes

$$T = 2gq \text{ coſ. } \Phi - \tfrac{R}{B} \text{ coſ. } \omega - \tfrac{R}{nB} \text{ ſin. } (\Phi-\omega) \text{ ſin. } \Phi$$

$$V = 2gq \text{ ſin. } \Phi - \tfrac{R}{B} \text{ ſin. } \omega + \tfrac{R}{nB} \text{ ſin. } (\Phi-\omega) \text{ coſ. } \Phi$$

Coroll.

Corollar. 2.

18. Ponamus R ſin. $\omega = P$ et R coſ. $\omega = Q$, erit R ſin $(\Phi - \omega) = Q$ ſin. $\Phi - P$ coſ. Φ, quibus valoribus ſubſtitutis, habebuntur hae aequationes:

$$T = 2gq \,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{Q}{B} - \frac{Q \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{ſin.}\,\Phi}{nB} + \frac{P \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi}{nB}$$

$$V = 2gq \,\text{ſin.}\,\Phi - \frac{P}{B} + \frac{Q \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi}{nB} - \frac{P \,\text{coſ.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi}{nB}$$

Corollar. 3.

19. Ex his ergo aequationibus reperitur:

$$Q = \frac{2nBgq \,\text{coſ.}\,\Phi + P \,\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi - nBT}{n + \text{ſin.}\,\Phi \,\text{ſin.}\,\Phi} \quad \text{et}$$

$$Q = \frac{nP + P \,\text{coſ.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi - 2nBgq \,\text{ſin.}\,\Phi + nBV}{\text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi} \quad \text{vnde deducitur:}$$

$$P = 2Bgq \,\text{ſin.}\,\Phi - BV + \frac{B \,\text{coſ.}\,\Phi}{n+1}(V \,\text{coſ.}\,\Phi - T \,\text{ſin.}\,\Phi) = R \,\text{ſin.}\,\omega$$

$$Q = 2Bgq \,\text{coſ.}\,\Phi - BT + \frac{B \,\text{ſin.}\,\Phi}{n+1}(T \,\text{ſin.}\,\Phi - V \,\text{coſ.}\,\Phi) = R \,\text{coſ.}\,\omega$$

Corollar. 4.

20. Cum autem inuenerimus $dq = \frac{R\,dx \,\text{ſin.}\,(\Phi - \omega)}{nBgg}$ erit $dq = \frac{dx}{nBq}(Q \,\text{ſin.}\,\Phi - P \,\text{coſ.}\,\Phi) = \frac{dx}{(n+1)gg}(V \,\text{coſ.}\,\Phi - T \,\text{ſin.}\,\Phi)$. Cognitis ergo viribus T et V mutatio motus inſtantanea determinari poteſt. Eſt autem $dx = -g\,d\Phi$

Problema 3.

21. Corporis vna flexura B praediti propoſito motu quocunque, inuenire huius motus variationem momentaneam, ſi corpus a nullis viribus externis ſollicitetur. Tab. II. fig. 5.

Solutio.

Verſetur corpus propoſitum in ſitu ABC, vbi flexura B moueatur ſecundum directionem BP cum celeritate

tate debita altitudini $= v$. Sint anguli, quos partes AB et BC quaſi alae cum recta BP conſtituunt, $ABP = \theta$ et $CBP = \Phi$; tum ſit celeritas rotatoria alae BA circa B in diſtantia $= 1$, debita altitudini p, et celeritas rotatoria alae CB circa B in pari diſtantia debita ſit altitudini q; vtraque autem ala motu rotatorio ad directionem BP accedat. Deinde ſit F centrum grauitatis alae AB, et $BF = f$; G vero ſit centrum grauitatis alae BC et $BG = g$. Denique ſit alae AB maſſa $= A$ eiusque momentum inertiae reſpectu centri grauitatis $= mAff$; ſimilique modo alae BC maſſa ſit $= B$ et momentum inertiae reſpectu ſui grauitatis centri G ſit $= nBgg$. Vtraque igitur ala ſequeretur motum impreſſum, niſi ligamentum in flexura B obſiſteret; ponamus ergo vim flexurae tantam eſſe, vt ala BC in directione BR ſollicitetur vi $= R$, ala autem AB in directione contraria Br aequali vi $= R$, ſitque angulus $OBR = \omega$. Ponamus iam punctum B ita progredi, vt primum in directione BP acceleretur vi $= T$, tum vero de ſemita rectilinea BP dextrorſum deducatur, vi normali $= V$. His poſitis ex conſideratione alae BC erit per coroll. 3. problematis praecedentis:

$$R \text{ ſin. } \omega = 2Bgq \text{ ſin. } \Phi - BV + \frac{B \text{ coſ. } \Phi}{n+1}(V \text{ coſ. } \Phi - T \text{ ſin. } \Phi)$$

$$R \text{ coſ. } \omega = 2Bgq \text{ coſ. } \Phi - BT - \frac{B \text{ ſin. } \Phi}{n+1}(V \text{ coſ. } \Phi - T \text{ ſin. } \Phi)$$

Eaedem vero formulae ad alam AB accommodantur, ſi loco horum valorum ſubſtituantur iſti

loco horum valorum	ſubſtituantur iſti
R	R
ω	ω
B	A
g	f
Φ	$-\theta$
q	p
et $\sqrt{\frac{q}{n}}$	$-\sqrt{\frac{p}{m}}$

Quo

Quo facto obtinebimus has aequationes

$$-R\,\text{ſin.}\,\omega = -2Afp\,\text{ſin.}\,\theta - AV + \frac{A\,\text{coſ.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{coſ}\,\theta + T\,\text{ſin.}\,\theta)$$

$$-R\,\text{coſ.}\,\omega = 2Afp\,\text{coſ.}\,\theta - AT + \frac{A\,\text{ſin.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{coſ.}\,\theta + T\,\text{ſin.}\,\theta)$$

quae ſi cum ſuperioribus comparentur dabunt:

$$2Afp\,\text{ſin.}\,\theta + AV - \frac{A\,\text{coſ.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{coſ.}\,\theta + T\,\text{ſin.}\,\theta) =$$

$$2Bfq\,\text{ſin.}\,\Phi - BV + \frac{B\,\text{coſ.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{coſ.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi) \quad \text{et}$$

$$2Afp\,\text{coſ.}\,\theta - AT + \frac{A\,\text{ſin.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{coſ.}\,\theta + T\,\text{ſin.}\,\theta) =$$

$$-2Bgq\,\text{coſ.}\,\Phi + BT + \frac{B\,\text{ſin.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{coſ.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi).$$

Sit breuitatis ergo $m+1=\mu$ et $n+1=\nu$; atque ex his aequationibus elicietur:

$$V = \frac{\begin{matrix}2\mu nB^2gq\,\text{ſin.}\,\Phi - 2\mu ABfp(n\,\text{ſin.}\,\theta + \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\overline{\Phi+\theta}) \\ + 2\nu ABgq(m\,\text{ſin.}\,\Phi + \text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\overline{\Phi+\theta})\end{matrix} - 2m\nu A^2fp\,\text{ſin}\,\theta}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\text{coſ.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

$$T = \frac{2\mu nB^2gq\,\text{coſ.}\,\Phi + \begin{Bmatrix}2\mu ABfp(n\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}(\Phi+\theta)) \\ + 2\nu ABgq(m\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}(\Phi+\theta))\end{Bmatrix} + 2m\nu A^2fp\,\text{coſ}\,\theta}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\text{coſ}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

Ex his porro prodibit

$$V\,\text{coſ.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{2\nu A\,\text{ſin.}\,\overline{\Phi+\theta}(Bgq\,\text{coſ.}\,\overline{\Phi+\theta} - \mu Bfp - mAfp)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB - AB(\text{coſ.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

$$V\,\text{coſ.}\,\theta + T\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{2\mu B\,\text{ſin.}\,\overline{\Phi+\theta}(-Afp\,\text{coſ.}\,\overline{\Phi+\theta} + nBgq + \nu Agq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\text{coſ.}\,\Phi+\theta)^2}$$

His inuentis, dum punctum B per ſpatiolum dz progreditur, eius motus ita accelerabitur, vt ſit $dv = T\,dz$, ſimul vero eius ſemita dextrorſum ita inflectetur vt curvaturae radius exiſtat $= \frac{2v}{V}$. Deinde alae BC motus rotatorius verſus BP accelerabitur in diſtantia $=1$ a puncto B vi acceleratrice $\frac{V\,\text{coſ.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi}{\nu g}$, alae autem AB motus rotatorius verſus BP accelerabitur in diſtantia $=1$ a puncto B vi acceleratrice $= \frac{-V\,\text{coſ.}\,\theta - T\,\text{ſin.}\,\theta}{\mu f}$, vnde motus pro-

propoſiti variatio per ſequens tempuſculum orta cognoſcitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

22. Quoniam momentum inertiae alae A B reſpectu centri grauitatis F poſuimus $= mAff$, erit eiusdem momentum inertiae reſpectu puncti B $= mAff + Aff$, et hanc obrem diſtantia centri oſcillationis alae A B pro puncto ſuſpenſionis B a B erit $= (m+1)f = \mu f$, ſimili modo alterius alae B C ex puncto B ſuſpenſae diſtantia centri oſcillationis a puncto B erit $= (n+1)g = \nu g$. Quodſi ergo haec centra oſcillationis fuerint data, exinde valores numerorum m et n itemque μ et ν definiuntur.

Coroll. 2.

23. Si alae in directum iaceant, fiet angulus $\Phi + \theta$ = duobus rectis, eiusque ſinus $= 0$, vnde hoc caſu motus rotatorii ambarum alarum nullam mutationem patientur primo ſaltem motus momento. Cum autem ſit ſin. $\theta =$ ſin. Φ et coſ. $\theta = -$ coſ. Φ, erit

$$T = \frac{2\mu n B^2 gq \cos.\Phi - 2\mu n ABfp \cos.\Phi - 2m\nu A^2 fp \cos.\Phi + 2\nu m ABgq \cos.\Phi}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB}$$

ſeu $T = \frac{2\cos.\Phi(Bgq - Afp)(m\nu A + n\mu B)}{(A+B)(m\nu A + \mu n B)} = \frac{2\cos.\Phi(Bgq - Afp)}{A+B}$

et $V = \frac{2\sin.\Phi(Bgq - Afp)}{A+B}$.

Coroll. 3.

24. Si inſuper anguli Φ et θ fuerint recti, tum erit quoque $T = 0$, ſeu celeritas flexurae B nullam variationem patietur; at vero via puncti B inflectetur dextrorſum

ſum vi, quae erit $= \frac{2(Bgq - Afp)}{A + B}$ vnde ſi alae fuerint eatenus ſimiles, vt ſit $Bgq = Afp$, tum quoque haec vis inflectens euaneſcet. Ceterum vero ſi fuerit $Bgq > Afp$ ſemita puncti B dextrorſum inflectetur, contra vero ſi $Afp > Bgq$ ſiniſtrorſum.

Coroll. 4.

25. Praeterea vero notandum eſt denominatorem pro ſuperioribus formulis inuentum

$$(mA + \mu B)(\nu A + nB) - AB(\text{coſ.}\, \overline{\Phi + \theta})^2$$

etiam hoc modo exprimi poſſe

$$(A + B)(m\nu A + \mu n B) + AB(\text{ſin.}\, \overline{\Phi + \theta})^2$$

Problema 4.

26. Si corpus ABC vna flexura in B praeditum ſuper plano horizontali politiſſimo vtcunque fuerit proiectum, neque igitur ab vllis viribus extrinſecus ſollicitetur, determinare eius motum ad quoduis tempus. Tab. II. fig. 6.

Solutio.

Sit linea ZB via, quam flexura iam deſcripſit, quae referatur ad axem ZO, ad quem per B normalis producatur OBP. Ponatur arcus $ZB = z$, et ducta ad B tangente BT vocetur angulus $PBT = u$ eritque radius oſculi curuae ZB in puncto $B = \frac{dz}{du}$. His poſitis ſit celeritas flexurae B ſecundum directionem tangentis BT debita altitudini v, eritque tempuſculo infinite paruo dt, $\frac{dz}{\sqrt{v}} = dt$. Deinde ſit partis ſeu alae AB maſſa $= A$, alae

$BC = B$, centrum grauitatis alae AB in F et alae BC in G, centrum oſcillationis alae AB in f et alae BC in g, vtrumque ad punctum ſuſpenſionis B relatum. Vocetur $BF = f$, $BG = g$, $Bf = (m+1)f$ et $Bg = (n+1)g$, poſitoque breuitatis ergo $m+1 = \mu$ et $n+1 = \nu$, erit $Bf = \mu f$ et $Bg = \nu g$. Praeterea ſit angulus $ABP = r$, et angulus $CBP = s$, et in diſtantia $= 1$ a puncto B ſit celeritas angularis alae AB verſus $BP = \sqrt{p}$, et celeritas angularis alae BC verſus BP circa $B = \sqrt{q}$, erit tempuſculo dt aſſumto, $\frac{-dr}{\sqrt{p}} = dt$ et $\frac{-ds}{\sqrt{q}} = dt$. Denique ponatur angulus $ABT = r+u = \theta$ et angulus $CBT = s-u = \Phi$, erit $r+s = \Phi+\theta$. His poſitis cum celeritas angularis alae AB circa B verſus BP acceleretur in diſtantia $aB = 1$, vi acceleratrice

$$\frac{-V\cos\theta - T\sin\theta}{\mu f} = \frac{2B\sin(r+s)(Afp\cos(r+s) - (nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos r+s)^2}$$

erit $dp = \frac{-2B\,dr\sin(r+s)(Afp\cos(r+s) - (nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos r+s)^2}$

Simili modo pro acceleratione motus rotatorii alterius alae BC verſus BP ex antecedentibus reperitur

$$dq = \frac{-2A\,ds\sin(r+s)(Bgq\cos(r+s) - (mA+\mu B)fp)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)g - ABg(\cos r+s)^2}$$

Quod poſtea ad motum puncti B attinet, is primo accelerabitur vi tangentiali T, ita vt ſit $dv = T\,dz$ exiſtente

$$T = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Afp\cos(r+u) + Bgq\cos(s-u)) + 2AB\sin(r+s)(\mu fp\sin(s-u) + \nu gq\sin(r+u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos r+s)^2}$$

tum vero ſemita flexurae B dextrorſum incuruabitur a vi normali V ita, vt ſit $\frac{2v\,du}{dz} = V$, exiſtente

$$V = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Bgq\sin(s-u) - Afp\sin(r+u)) - 2AB\sin(r+s)(\mu fp\cos(s-u) - \nu gq\cos(r-u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos r+s)^2}$$

His autem aequationibus, quas inuenimus, totus corporis motus determinatur. Q. E. I.

CLASSIS.

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

ANIMADVERSIONES VARIAE IN ERINACEORVM TERRESTRIVM ANATOMEN: QVARVM NONNVLLAE NVNC AD STRVCTVRAM VESICVLAREM VISCERVM: NONNVLLAE AD NOVORVM RENVM SVCCENTVRIATORVM ILLVSTRATIONEM PERTINENT.

AVCTORE

D. D. Du Vernoi.

Viſcera ſecundum naturam componi debebant diſſimili reliquarum partium ratione, e communibus non ſolum particulis inſtrumentalibus, vt ſunt canales omnis generis, ad materiam nutritioni et ſecretionibus vtilem adducendam et reducendam; verum quoque e priuata ac propria ſubſtantia, a vaſculari natura tam vſu quam ſtructura diſcrepante, ad actionem ſecretionis proximam et immediatam et ad reliqua eo ſpectantia perficienda, quemadmodum Illuſtris Morgagni ſcriptis lectu dignisſimis, ac imprimis Epiſt. Anat. 3. praeclare expoſuit: contra alios quidem doctiſſimos viros, docentes, viſcera et corpora glanduloſa componi ac duntaxat vti ſimplici fabrica vaſculoſa, praememoratam ſecretionis actionem perficiente, cum tamen vniuerſim totum corpus animantium venis, arteriis et omnis generis vaſis, tam ad circuitum ſanguinis, quam ad ſenſationum et motionum officia ſit conſtructum: hinc, cum iuxta horum ſententiam nulla ſit partium diuerſitas peculiaris, nihil prohiberet, quo minus oſſa, cartilagines, muſculi, quemadmodum corpora glanduloſa, ſecretionis officium exerceant; Tab. III.

ſi

ſi nempe rei efficiendae nulla alia quam ſtructura vaſcularis neceſſaria fuiſſet.

Sed contrarium oculis tam perſpicue, vt optari poteſt, conſpicitur, qua nempe ratione e mixta ſubſtantia veſiculari-vaſculoſa viſcera a natura componantur: quod 1. exempla et deſcriptiones ad hoc tempus comprobant quadrupedum, volatilium et piſcium variorum teſte ſ. c. (Epiſt. 3. Anat) 2. ſpeciatim ac multo adhuc quam antea clarius et ſimplicius res ante oculos poſita eſt ſequenti incomparabili exemplo, de quo iam dicendum eſt.

Exemplum illud ad erinaceorum vbera, lactationis inprimis tempore et ſubcalido adhuc corpore, ſpectat: in quibus, cute duntaxat inciſa, tam interna quam externa ſuperficie, ipſae veſiculae, incredibili frequentia, protinus ſeſe prodere incipiunt, et ſic cuilibet ſpectantium per ſe, nulla manuum opera, vltro conſpicuae ſunt. Antequam has perſequamur, obſeruandum eſt, erinaceorum vbera, numero, forma, ac amplitudine, ab aliis animantibus manifeſto diſcrepare: ex his enim ſunt, quae multiplici ſerie mamillarum: alia contra, quae vno duntaxat pari conſtant: apud nonnulla, ſuperius parte antica pectoris: apud alia, ima abdominis parte vtrinque poſitae: vniverſim, quodam interuallo a ſe inuicem diſiunctae, ac figura oblongo rotunda praeditae ſpectantur. Nullae apud erinaceos a nobis inciſos tales diſtinctae ſeries mamillarum occurrebant, quin imo, inter dexteri et ſiniſtri lateris vbera, nullum diſiunctionis indicium, ſaltem viſibile, verum tam iuxta longitudinem quam latitudinem quae inter iugulum ac imum abdominis intercedit, nihil aliud ſpectatum eſt, quam ſubſtantia vberum continua ac indiuiſa, ad plani et latio-

latioris integumenti, 3. lin. craſſitiem aequantis ſimilitudinem accedens: cui exterius annexae erant multiplices papillae, vtrinque quaternae acuminatae (a Stenone 5. paria) ad plures foetus ſimul alendos: hac ratione, vbera erinaceorum, vnicae et ſimplicis duntaxat, ſed ampliſſimae mamillae ſpeciem referre nobis viſa ſunt.

Vt ad veſiculas nunc reuertamur, tametſi membrana duntaxat tenuiſſima ſint praeditae, illas tamen ſpectare tanto erat facilius, quanto maior luciditas a lactis incluſi copia his accedebat: ſic aliquot millia in extima ſuperficie per ſe ac inermibus oculis erant conſpicua, vt earum peculiaris figura, ſeries et color niueus nunquam exactius et elegantius referri poſſe videretur. Similiter, reliquam ſubſtantiam interiorem ſpectando, nihil ſane ipſa a priore diſcrepabat: hae omnes vniuerſim inter ſe aequali erant figura, et magnitudine, minime diſcrepante, inuicem ſtrictius vnitae, ac per multiplices membranoſas propagines plurimis vaſculis inſtructas ſimul firmatae, ex quibus varia interſepta et retia fibroſo-vaſcularia componebantur; ſimul vero cautum eſt, ne ipſae per haec retia, vel per quaſcunque alias res, vt apud nonnulla animantia contingit, obducerentur: vnde haud minus animaduerſione dignum eſt, quod circa vbera erinaceorum nihil fere pinguedinis, quod prohiberet, poſitum eſſet: Quicquid enim hic pinguedinis exterius collectum erat, vix paucis moleculis ſublutei coloris conſtabat: tantum abeſt, vt ſua continuitate et aequali expanſione, ad ſpeciem adipoſi inuolucri vbera obducentis et contra frigus defendentis, vt apud alia animantia accederet, potius memoratae moleculae paucis duntaxat locis erant poſitae,

 dum

dum reliqua longe ampliſſima ſuperficie nullae conſpicerentur. Similiter per interiora vberum manifeſtum defectum pinguedinis fuiſſe obſeruandum eſt; ac ea cauſſa non ſolum intra, ſed extra aquam perquam facile conſpicuum erat, qua frequentia, quo ordine, qua amplitudine, quo denique nexu, veſiculae a multis inique damnatae, naturae conſilio per vniuerſam ſubſtantiam ſint intextae.

At credibile tamen eſt, quod nonnulli erinacei, ob alimentorum regionum et temporum diuerſitatem, noſtrorum diſſimiles ac pinguiores inueniantur, ob quam cauſſam, per implexum pinguedinis vel per plenitudinem vaſorum, veſiculae ſic obductae ſunt, vt globuli adipoſi duntaxat, ac vaſa ſpectari poſſint: quo magis hinc perſpicuum eſt, cur in variis antea in lucem editis deſcriptionibus veſicularis ſtructura viſcerum omiſſa fuerit, in quibus ceteroquin multa lectu digniſſima, ac in rei anatomicae incrementum vtiliſſima, obſeruata ſunt.

Hoc idem iudicium iure meritoque in aliud corpus veſiculoſo glanduloſum in erinaceis pariter cadere, nempe in capſulas ſeminales, veriſimile nobis viſum eſt, quando a Coitero, accuratiſſimo alias anatomico, ſcriptum eſt, *vbi deferentia vaſa terminantur inter rectum inteſtinum et veſicam vrinariam, eoue in loco, in quo in nobis varicoſi adſtites collocati ſunt, reperiebantur glandulae carnoſae tres ſatis magnae, et laxis ligamentis invicem cohaerentes, nulla praedita cauitate.* Quidnam enim aliud de iſta hallucinatione nobis iudicandum eſt, niſi quod tum temporis, ab ignota quacunque cauſſa, veſicularis ſtructurae ac eam componentium cauearum priſtina facies abolita fuerit:

vnde

vnde circa praememoratas partes, nihil quam carnea ſubſtantia ſub oculos caderet. Noſtrorum erinaceorum capſulae ſeminales 1.° corpus referebant ampliſſimum, menſuram peluis longe excedens, ac verſus renes altius aſcendens, membrana bipartitum pellucida, per quam non ſolum dextrae et ſiniſtrae diuiſionis nexus, verum etiam commune inuolucrum a natura conſtitutum erat. 2. Vnicuique diuiſioni, quatuor glandulae propriae erant, laxis membranis interſtinctae, vt diſtincti lobuli: vnde totum praememoratum corpus, e glandularum 4. paribus manifeſto conſtabat. 3. Hae e membranoſa tenui, alba et pellucida ſubſtantia ſimpliciter conſtructae erant, vnde per eas ſemen incluſum manifeſto translucebat. 4. Sub communi membrana ſeu inuolucro has inueſtiente, multiplices ſeries orbiculares, forma ac ſpecie pellucidi et longiſſimi ductus ſeu ſacculi, ſemen continentis, transparebant: hae ſeries nihil a veris veſiculis diſcrepant, niſi quod craſſitie ſint maiores, ac non ad oualem, vt aliae veſiculae, verum ad cylindricam figuram accedant: qua in re nihil eſt cauſſae opinor, cur minus pro veſiculis haberi debeant. Poſtremo, nihil vltra, obſeruatione dignum erat, quam ima praememorati corporis parte, tria emiſſaria ſeu ductus per ſe conſpicui, recti et perpendiculares, ſemen intra collum veſicae, inter hanc et rectum inteſtinum, abducentes, quo in tranſitu a teſtium deferentibus vaſis, in modum arcus decuſſabantur: vt colli veſicae carneo annulo excepti ſint, ſinus vel cauitas peculiaris, diametro vrethrae aequalis, ac transuerſali foramine in vrethram patente praedita, ſedem inter praememoratum annulum tunicamque vrethrae nacta, conſpiciebatur, ad ſemen quod

 haud

haud immediate in communem vrinae et ſeminis canalem effundi debebat, aſſeruandum, ac vna cum aliis nonnullis eo confluentibus humoribus permiſcendum: igitur, collo veſicae anterius aperto, ac ſinu in longum inciſo, ſex varia orificia circa eiusdem fundum patebant, nempe par 1. vno vtrinque meatu, (iunctis inuicem capſularum ſeminalium ſimplici aut duplici emiſſario, ac teſtium vaſe deferente) conſtans; haec propterea orificia, reliquis ſunt ampliora ac protuberantiora. Sequitur par 2dum vtriusque proſtatae. Poſt haec, par 3tium intra ſinus angulos paulo altius poſitum, quod e quadam inſigni glandula, exterius ſub cute, ad vtrumque latus recti inteſtini locata, ortum trahebat: vnde, forma tenuis ac longitudinem glandulae triplo excedentis ductus, in praememoratum ſinum terminabatur.

Vt ad ſtructuram veſicularem reuertamur, ab ea haud diſcrepans quoddam veſicularum genus, in erinaceis, per thymi ſubſtantiam glanduloſam ac nulla infectam labe, disgregatum erat, quas autem ſilentio hic praetermittimus: quippe ſingulatim iſtiusmodi ſtructuras veſiculares indicare ac pertractare ſtuduimus, quarum quisque per ſe, nulla praeparatione anatomica ſpectator eſſe poſſit: praeter duntaxat intus latentem ſtructuram: ad quam ſpectandam, parum ſpei relinquunt tenuitas, anguſtia, mollities aliaque impedimenta: idcirco, circa veſiculae corpus, et circa eiusdem anatomen euenit, quod in bulla aquea: hae enim disrupta, ac ſui nexus experte, de tota veſicula, ac eiusdem priſtina ſpecie, et conditionibus, quin imo, ſede et cauitate, nullum fere veſtigium oculis ſpectandum relinquitur. Quas ob cauſſas, quid natura intus molita ſit,

num

num e ſimplici cauea duntaxat, an vero alio ſtructurae genere, veſiculae conſtent, ad hoc tempus, vt multa alia, ignoramus, quae ſecus ac nonnulli exiſtimant, abſolute ab anatomes poteſtate aliena ſunt.

Animaduerſio de nouis renibus ſuccenturiatis.

Cum coeptas obſeruationes de minimis renibus ſuccenturiatis a nemine adhuc deſcriptis, ante aliquod tempus Academiae iudicio ſubmitteremus, eos diximus, fabrica et conditionibus internis, a glandularum renalium Euſtachii natura, minime diſcrepare, ac vt horum embryones, aequali cortice, cauea ac liquore conſtare: in his, vt dictum eſt, moles perexigua, nempe vt ſemen lini, vel vt granum ſinapi, vel magnitudinis paulo maioris, vel ad ſummum vt piſum: figura globoſa vt piſum, vel elliptica vt ſemen lini: color renum ſimilis: ſedes vt plurimum pone renem ſuccenturiatum tam dexterum quam laeuum, ſub communi adipoſo inuolucro: diſtantia alterius ab altero perexigua: quinimo amborum coniunctio et accretio in nonnullis manifeſta: poſt haec, numerum multiplicem fuiſſe diximus, interdum renum ſuccenturiatorum numero aequalem, ſaepe auctiorem, quin imo ſemel vno latere ternarium: haec omnia poſtremo perſpicuis exemplis omnium huius generis a nobis obſeruatorum renum minimorum tam in maſculino quam foeminino ſexu illuſtrauimus, ac in ſpem optimam adducti fuimus, plura ea de recognoſcendi, ſi nempe aliorum diligentia et ſolertia acceſſerit.

Ducto ſic obſeruationum noſtrarum principio a C. H. videndum eſt, num viciſſim hi minimi renes beſtiarum corporibus communes, an contra omiſſi: ac initio quidem commemorandum eſt examen erinaceorum quibus a diuino opifice praememorati renes manifeſto tributi fuerunt.

In echinis iunioribus, ren ſuccenturiatus tam dexter quam ſiniſter, granum hordei aequabat: contra apud adultiores decreſcebat: hi renis ſupremae ac concauae parti, ope membranae celluloſae, quae pauca duntaxat pinguedine eſt inſtructa, annexi erant. Quod autem renum ſuccenturiatorum minimorum disquiſitionem attinet, examen quidem ea de cauſſa, diuerſae aetatis et ſexus erinaceorum, ſaepe multumque a nobis inſtitutum fuit, ſed, vt vera fateamur, nequaquam horum conſpectu frui potuimus: vnde oculos effugiſſe paruitate credibile erat, vt euentus poſtea edocebat: nempe alia occaſione nobis allatus fuit echinus foemina, recens natus, vna cum matre hunc lactante, in qua quidem nullum renem ſuccenturiatum praeter duos ordinarios, offendere potuimus; verum in iuniore ſpes nequaquam fefellit. Is rene vtroque ſuccenturiato, vt in ſupra memoratis, conſtabat: poſt haec, horum dexter, vt praeclare obſeruabam, alterum ſibi ſocium habebat minimum figurae orbicularis, grano papauerino aequalem, ac vt videbatur, haud extra, ſed intra tunicam celluloſam immediate poſitum, vnde ea detracta, a rene facile hunc auellere licebat. Vas perexiguum, arcus in modum, ad huncce renem tendens ſpectabatur. Denique, eius ſubſtantia renis ſuccenturiati ſimillima, cortice, cauea ac colore praedita erat, vt caeteri noui renes ſuccenturiati, in C. H. primum obſeruati.

De

DE PITVITA GLVTINOSA LARYNGIS.

AVCTORE
Ioſia Weitbrecht.

§. 1.

Interiorem oris cauitatem, labiorum, linguae, palati, pharingis, laryngis ſuperficiem, innumeris emunctoriis ſcatere, quibus humores vario habitu excreti miſtim in ore deponuntur, non modo per anatomicorum ſcrutinia edocti ſumus, ſed et experientia ipſa ſufficienter comprobat. Inter hos humores multum inter ſe diuiſos ſingularis aliqua materia per ſcreatum ex faucibus reiici ſolet, quae nec ſaliua, nec mucus glandularum palati, aut narium, nec denique pus dici poteſt, ſed quae ab his omnibus, conſiſtentia et natura ſua, colore, et origine diſtinguitur, et hinc ſpecialem aliquam conſiderationem meretur, quam in hoc ſcripto inſtituemus.

§. 2. Eſt autem materia iſta ſingularis pituita aliqua albicans, ſumme tenax et glutinoſa, per ſcreatum in maſſam ſpiſſam et quodammodo conſiſtentem collecta. Haec pituita, quando ſimul cum ſufficiente ſaliuae tenuis quantitate excernitur, in vnum quaſi glomeramen conuoluta illi innatat, nec cum ea commiſcetur. Quo purior eſt, vel, quo minus ſaliuae aut muci narium palatiue admiſtum habet, eo tenacior eſt, ita vt non ſolum internis faucium parietibus ſed et externae cuti adplicita tamquam gluten pertinaciter adhaereat, et nonniſi mediante ſaliua abſter-

ſtergi queat; inſimul haec glutinoſitas illi duritiem quandam conciliat, vt dentibus trita ſtrepitum aliquem excitet.

§. 3. Haec peculiaris pituitae repugnantia, dum cum ſaliua ſe permiſceri non patitur, ſatis demonſtrat, binos hos humores natura ſua inter ſe differre, etſi non longe a ſe inuicem ſegregentur, et in vicinis faucium regionibus confluant. Pari modo inde concluditur, illam non eſſe pus, quippe quod cum ſaliua miſtum ab illa ſoluitur, et in vnam maſſam cum illa fatiſcit. Neque minus a reliquo palati et faucium muco per inſignem illam et pertinacem glutinoſitatem diſtinguitur. Mucus iſte quidem multo maiori lentore gaudet ac ipſa ſaliua: magis tamen ad conſiſtentiam pultiformem accedit, et ab hac pituita, (ſi quidem aliquam ſimilitudinis comparationem inſtituere licet) tamquam vnguentum aliquod blandum a bitumine differt.

§. 4. Color huius pituitae varius eſt. Plerumque albeſcit. Quo copioſior autem eſt ſecretio, eo magis ab hoc albo colore deflectere et in glaucum vergere expertus ſum. Interdum flauedine quadam tingitur. Haec ipſa coloris differentia etiam diuerſum tenacitatis ſtatum arguit. Glauca enim pituita ſemper tenacior eſt albicante; omnium minime tenax flaua. Porro totus pituitae glomus opacus eſt, quo ipſo a muco narium, qui vitrea plerumque pelluciditate gaudet, diſtinguitur. Denique ſtriis ſubinde maculatur nigris, quae autem a fumigationibus per reſpirationem attractis deriuandae videntur.

§. 5. Huius pituitae copiam per plures menſes paullatim collegi, et in vaſculo leuiter tecto in muſeo meo conſeruaui, vt quibus mutationibus obnoxia foret, cognoſcerem.

rem. Quamuis igitur totius anni ſpatio abſque vllo putredinis aut efferueſcentiae ſigno notabili, quod aut nares feriret aut oculis diſcerneretur, conſiſteret: non tamen plane eadem permanſit. Et quidem primo, quotiescunque noua additio fiebat, omnes pituitae glomi et monticuli tamen poſt aliquot horas in aequabilem planitiem diffluebant. Tum vero, ceſſante collectione, ſuperna ſuperficies paullatim in duram cruſtam inaruit; reliqua autem maſſa non indurata in volumen minus contracta aërem contentum in vnum ſpatium medium coëgit, et amiſſa tenaci glutinoſitate ſua in craſſam, mucoſam, pultiformem, opacam, ſubflauam materiam granulis albis, duriuſculis, friabilibus interſperſam tranſiit. Huius materiae portio retortae indita, et examini ignis ſubiecta, in paucum ſal volatile et oleum acerrimum, intolerabili foetore olea ex C. C. parata longe ſuperans et phlegmati plurimo ſupernatans reſoluta eſt. Alia portio ex granulis iblis albis potiſſimum conſtans per affuſam aquam et quietem ad maiorem putrefactionem euecta in mucum ſebaceum aqua non ſolubilem abiit; in patina autem ferrea prunis candentibus impoſita, euaporata humiditate et proiectis plurimis bullis aëreis in ſquamulas fuſcas, puluerulentas nullo ſapore praeditas exaruit, relictis in ferro maculis de tenaci cum ferro cohaeſione teſtantibus.

§. 6. Ex allatis (§. 5.) obſeruationibus non ſolum in genere pituitae huius natura eluceſcit, ſed etiam differentiae §. 3. allatae vlterius comprobantur. Differt enim a pure ob ſtatum ſuum incorruptum et foetoris abſentiam; differt vero etiam ob eandem corruptionis difficultatem et ſaporis in vſtione defectum quam maxime a ſaliua;

haec enim non modo, ceteris paribus, intra paucos dies facile in putredinem abire, ſed et puluerem eius ſimili vſtionis methodo generatum ſaporem ſaturate ſalſum produxiſſe expertus ſum. Conuenit autem pituita haec potiſſimum cum muco narium, qui itidem, dum adhuc in calidis narium latebris haeret, facile areſcit, et extra illas collectus aeque difficulter corrumpitur. Reſolutio denique per ignem facta certiſſimum characterem prodit; illam regni animalis naturam perfecte conſeruare, et pro humore a viribus corporis iam ſufficienter ſubacto et immutato haberi debere, indubitanter docet.

§. 7. Quantum obſeruando aſſequi licet, humor hic glutinoſus non in faucibus aut palato aut oeſophago haeret, neque etiam in pulmonibus, quam late patent, ſedes illius quaerenda; ſed in ſola trachea, et quidem ſpeciatim in portione eius ſuperiore, nempe in ipſius laringis cauitate interiore, ventriculis praeſertim et cryptis, circa ipſam glottidem et eius operculum. Neque etiam aliter ab illo ſecreto liberamur, niſi aucta aëris in exſpirando velocitate, dum vel per tuſſim excitatam vel per ſcreatum a lateribus tracheae et laryngis auerritur quaſi et reiicitur. Interim non nego, fieri poſſe, vt accumulata pituita certis temporibus etiam paullo profundius in tracheam deſcendat.

§. 8. Eructatis huius pituitae in ſtatu corporis cetera ſano, omnium maxima et fortiſſima eſt matutinis horis, quando euigilans corpus erigi et moueri incipit; quemadmodum hoc tempore omnia oris, palati, faucium et narium emunctoria expurgari et ad copioſiorem excretionem, quae tota nocte ſufflaminabatur, ſollicitari ac determinari

minari ſolent. Praeſentia eius per moleſtam aliquam laryngis et vicinarum partium tenſionem, et aliqualem reſpirationis difficultatem indigitatur. Quia vero tum quam maxime pura nec aliis humoribus minus glutinoſis intermiſta eſt, etiam lateribus laryngis tanto pertinacius adhaeret, et tanto difficilius excernitur. Ad facilitandam igitur eructationem requiritur, vt alii humores aquoſi, qui gluten iſtud obtundere valent, quales ſunt vapores ſaliuae ex ore per inſpirationem allati, et reliquus tracheae natiuus mador, applicentur. His enim reciprocato aëris traiectu immiſtis et interpoſitis pituita tandem a laryngis parietibus ſoluta abſtergitur, ac per tuſſim et ſcreatum agitata reiicitur. Dum vero accumulata pituita reſpiratione intra laryngis et tracheae cauitatem nunc ſurſum nunc deorſum fertur, non poteſt non glottidis aperturam ipſam obſidere, illam inordinatim coarctare, et inuoluntarium ſibilum ſtrepitumque cum raucedine ſubinde coniunctum efficere.

§. 9. Quando pituita pura et copioſa eructatur, plerumque ſub habitu maſſae alicuius ſpiſſae rudis, indigeſtae et vniformis apparere ſolet, in qua nulla partium componentium diſtinctio diſcernitur. Cum vero aut ſaliua, aut narium mucus vitreus aut laryngis mador intermiſcetur, generatio eius quodammodo manifeſtatur. Ex plurimis enim maſſulis quaſi granulatis conflata eſſe videtur, quae maſſulae porro ex mucoſis filamentis ſerpentino modo intortis ac conuolutis conglomerantur.

§. 10. Haec filamentorum configuratio luculenter, niſi fallor, arguit, adeſſe ſingularia organa, ex quorum orificiis anguſtioribus iſta eructentur, et in quorum ſinibus ac

receſſibus interioribus a maſſa ſanguinea ſecernantur. Ita quidem ex analogia, quam ſecretio aliorum humorum paullo ſpiſſiorum in C. H. (quales ſunt materiae ſebaceae) manifeſto ſuppeditat, concludere licet. Organa iſta glandulas dicere ſolemus. Quales autem et quaenam ſint iſtae glandulae, quae hanc pituitam glutinoſam et tenacem laryngis ſecernunt, per ſolas anatomicas disquiſitiones non ſatis videtur determinatum. Ne igitur temere quid ſtatuamus, aliquas conſiderationes ſubiungere non inutile fore putauerim.

§. 11. Duae potiſſimum ſpecies glandularum circa laryngem et tracheam cognitae ſunt, quas ſolertiſſimi Morgagni diligentia partim in apricum produxit, partim exactius deſcripſit. Tales ſunt glandulae epiglottidis et arytenoides in larynge, quae ſaepe conglomeratarum more, in racemos molles collectae ſunt; in trachea autem illae, quae in poſtica eius portione, in interſtitio membraneo longitudinali inter cartilaginum ſemiannularium terminos relicto, detracta tunica exteriore, ſolitariae, ouales et compreſſae conſpiciuntur, et quarum canaliculi per ſubiectas fibras carneas transmiſſi oſculis ſuis excretoriis intra aſperam arteriam hiant. Aut igitur harum ſpecierum alterutra, aut ambae pro pituitae glutinoſae ſcaturigine haberi debent, aut aliae quaedam nouae glandulae hactenus incognitae anatomicorum ſcrutinio detegendae reſtant, quibus iſta functio aſſignari queat.

§. 12. Quod ad glandulas in tracheae dorſo poſitas et ſecundo loco enumeratas attinet, illas huic ſcopo inſervire vix probabile eſt. Humor enim hic excrementitius in ſuprema larynge ſedem ſuam habere ſolet; glandulae autem

autem illae humiliore tracheae loco et circa primas bronchiorum diuiſiones reſident. Tale gluten, ſi tam profundo loco generaretur, non ſolum ſumma cum difficultate et aëris concuſſione vehementiſſima eleuari deberet, ſed verendum etiam eſſet, ne perpetuas bronchiorum obturationes efficeret. Recte igitur mihi iudicare videntur anatomici, qui blandum iſtarum glandularum liquorem illinendis tracheae parietibus et emolliendis eius partibus inſeruire arbitrantur, id quod a pituita iſta glutinoſa exſpectari nequit. Neque obſtat, quod liquor ex iſtis glandulis expreſſus a proſectoribus etiam viſcidus deprehenſus fuerit, qui enim in cadauerum ſectionibus occupati ſunt, ſaliuam, in corpore viuo ſatis tenuem, et ceteros glandularum oris humores, exhalante parte tenuiore, poſt mortem in viſcidum et tenax liquamen ac ſpiſſum mucum fatiſcere ſolere haud ignorant; vt igitur a viſcoſitate liquoris in corpore mortuo de tenacitatis gradu in corpore viuo iudicare neutiquam licet. Sin accidat, quod in ſtatu corporis morboſo ſubinde fieri poſſe non negauerim, vt glandularum iſtarum functio eo degeneret, vt humoris tenuis loco pituitam tenacem fundant: omnia praedicta incommoda oppreſſionem pectoris minitantia ingruere ſimul experimur.

§. 13. An ſingulares glandulae dentur hactenus incognitae, e quarum fonte pituita deriuari poſſet? cum haec quaeſtio contradictionem nullam inuoluat, animum meum compulit, vt ſtudioſius has partes perſcrutarer; ſed repetitis diſquiſitionibus in hunc finem directe inſtitutis nihil deprehendi, quod non ab aliis iam obſeruatum et dictum fuerit. Non poſſum tamen reticere ſingularem quandam

 ſpe-

ſpeciem ventriculorum ſeu burſularum, in quibus humor affluens itidem ſtagnare poteſt. Sitae ſunt iſtae vtrinque in poſtica facie exteriore laryngis, et generantur, dum laxa oeſophagi tunica, quae ſuperficiem cartilaginis cricoidis, et interiorum ventriculorum exteriores parietes inueſtit, in hiatum ſe demittit, qui eſt inter marginem longitudinalem cartilaginis ſcutiformis et inter muſculum cricoarytenoidem poſticum. In his cryptis ille imprimis mador, qui ad latera radicis linguae et epiglottidis fortaſſe et ex tonſillis vtrinque depluit, coaceruatur, et compreſſis cartilaginis ſcutiformis alis ad latera cricoidis eructatur; qui tamen mador et humor a pituita laryngis diverſus eſt.

§. 14. Solae igitur epiglottidis glandulae, et, quas arytenoides produxit Morgagnus, reſtant, in quarum receſſibus pituitae huius glutinoſae ſcaturigo quaeri debet. Cui quidem ſententiae, quamuis illa nec a priori ex natura et fabrica glandularum, nec a poſteriori per experimenta indubitata demonſtrari queat, illi tamen imprimis fauet partim ſitus pituitae, cuius accumulationem potiſſimum circa ſuperiora laryngis perſentiſcere (§. 7.) diximus: partim ſitus glandularum ipſarum; fieri enim non poteſt, quin materia ex his glandulis copioſius ſecreta circa ipſam glottidem confluat, ventriculos occupet, et coarctata via celeritatem aeris tranſeuntis augeat: partim denique analogia, quae inter alios humores, in viis cartilagineis ad reſpirationem pertinentibus, generatos intercedit; e. gr. dum de muco narium diximus (§. 6), illum ad tenacitatem et incorruptibilitatem huius pituitae quam proxime accedere.

§. 15.

§. 15. Cognita pituitae glutinoſae natura, quantum per obſeruationes et experimenta licuit, et illius origine probabili, liceat aliquas concluſiones annectere, quarum vſus in phyſiologiam et pathologiam redundare forte poterit. Et primo quidem non praetereunda mihi videtur differentia duorum ſingularium characterum, qua humores, alii ad nares et laryngem, alii vero, ad os, palatum et oeſophagum pertinentes inter ſe diſtinguuntur. Iſti quidem ſibi relicti, ſimplices, tamquam inertia corpora pauciſſimis partibus heterogeneis, ſalinis oleoſisue impraegnati eſſe videntur, vel ſaltim tales, quorum partes ob intimam miſturam ſuam difficulter extricantur: hi contra talibus particulis vberrime ſcatentes tanto facilius ad corruptionem et putredinem tendunt. Cumque ſaliua et reliqui cognati humores in eum finem potiſſimum comparati ſint, vt lubrica laeuitate ſua viam tranſeuntibus cibis ac potionibus faciliorem reddant, et admiſtione ſua partim ſaporem excitent, partim aſſumtorum moleſtum ſubinde acrimoniam obtundant: iſti narium et laryngis muci e contrario glutinoſa tenacitate ſua effluuia olfacientia, aliaque corpora ſpiratione aeris vndecunque attracta adeo pertinaciter irretiunt, vt tuto caueatur, ne quidpiam pulmonum motui infeſtum facile illabatur.

§. 16. Alterum eſt, pituitam laryngis eſſe mere excrementitiam, id eſt, talem qualis ad corporis ſubſtantiam nutriendam non amplius apta eſt. Quamuis enim vſui ſupra memorato inſeruiat: tamen, ſi diutius moraretur aut copioſius accumularetur, non niſi ſpiritus interclusionem, et aliorum oſculorum exhalantium obſtructionem tandem efficeret; cumque nulla via pateat per pul-

mones

mones effluendi, neceſſario reſpirationis ope expelli debet. Non ſolum vero excrementitia eſt, ſed vbertim generata etiam ſemper morboſi quid ſubeſſe portendit; imo dubitari poteſt, num homo perfecte ſanus, iuuenis imprimis et vegetus, in cuius corpore reliquae ſecretiones omnes rite procedunt, talem pituitam vmquam ſecernat? ex iunioribus illi potiſſimum hoc affectu laborant, quorum natura catarrhis adſueuit. Dantur quidem plures, plerumque ſenes huic ſcreationi obnoxii, qui, excepto hoc incommodo proſpera ſatis valetudine vtuntur; hinc ſi pituitae ſecretio intra modicos fines tam ratione quantitatis quam temporis cohibeatur, nondum propterea pro morboſo affectu haberi debet, ſed inter res non naturales merito refertur: at vero, quando illa debitos limites tranſgreditur, omnino ſtatus aliquis praeternaturalis ſuſpicandus eſt. Primo enim iam hic ipſe error naturae eſt, quod per talem copioſam et aſſiduam ſecretionem corpus a ſuperfluis humiditatibus purgare aſſueſcit in tali loco, vbi ob partium nobiliorum viciniam et connexionem actiones vitales facile damnum aliquod accipere poſſunt. Si coniecturis locum dare licet, cauſſa proxima quaerenda forte erit in oſſificatione cartilaginum, in quarum latebris memoratae glandulae reſident, dum enim illae propter ſolidiorem maſſam minus nutrimenti requirunt, humores ſuperflui, accretioni illarum a natura deſtinati, ad glandulas redundant, ibique ſub pituitae forma ſecernuntur. Deinde experientia docet, hunc affectum ingraueſcentem anginam, raucedinem, tuſſim humidam, fluxionem ad pulmones, difficilem reſpirationem producere poſſe. Non autem mox pro phtiſicis declarandi ſunt, qui huius pituitae

tae largiori ſecretione ita quidem ſaepe affliguntur, vt leviſſimo quoque tuſſiendi aut ſcreandi motu portionem eius haud exiguam extrudere queant; vt potius phthiſin averti per eandem crediderim; quippe accidere poteſt, vt, etſi copioſa, quam maxime ſalutaris tamen euadat, quando e. gr. raucedini, peripneumoniae, aliisque pectoris oppreſſionibus aliunde obortis ſuccedit, et morbi per eam feliciter iudicantur. Fieri autem poteſt, vt ex glandularum huc pertinentium obſtructione et ſtatu ſcirrhoſo, et pituitae ſecretione hinc dependente ſufflaminata phthiſis denique conſequatur; quemadmodum in aliquibus expertus ſum, qui principio ſolis doloribus punctoriis et conſtrictoriis corripiebantur, mox vero cum raucedine aſpera, ariditate laryngis, ſiti nullo liquido compeſcenda, ſpiritus intercluſione et ſuffocationis metu, febre denique hectica et totius corporis tabe per aliquot hebdomadas conflictabantur, donec vitam cum morte commutarunt.

DE CALORE AC FRIGORE EXPERIMENTA VARIA,

FACTA a

Georgio Wolffgango Krafft.

§. 1.

Cum natura huius regionis noſtrae inſtituendis experimentis de frigore mirum in modum quandoque faveat: non neglexi acerbitatem hanc vertere in emolumentum, quantum potui, et quantum ratio virium circumſtantiarumque mearum paſſa fuit. Quae hoc modo praeſtiti, exponam *Academiae* in praeſente diſſertatione; non eum in finem, vt iis, quae enarrabo, nihil amplius addi poſſe putem, ſed vt anſam aliis praebeam haec aut confirmandi, aut augendi. Tanta enim adhuc hae qualitates obſcuritate teguntur, vt ad eas illuſtrandas non aliquot annorum ſpatiolum, ſed forſan plus quam integra aetas; neque vnus tantum, ſed plures ſagaciores requirantur.

§. 2. Quoniam in ipſa hac vrbe noſtra menſibus Februario et Martio ex glacie, qua fluuius *Neua*, vrbem transfluens, quotannis conſtringitur, ingens numerus fruſtorum exciditur, ad potulenta per aeſtatem in cellis conſeruanda deſtinatorum: optatiſſima haec mihi viſa fuit occaſio in rationem refractionis, quae in glacie obtinet, inquirendi. Sunt enim haec fruſta glacialia, licet non ſemper, vt plurimum tamen ita pellucida, vt in craſſitie aliquot pedum facillimam radiis lucis permittant viam. Selecta igitur in hunc finem maſſa glaciali aptiſſima, duos

pedes

pedes circiter alta et vnum lata, maxime pellucida et homogenea vbique, confici curaui machinam examinandae huic refractioni idoneam, conſtantem ex duobus aſſerculis F G et F B, querais, bene dedolatis, et ad angulum rectum inter ſe iunctis. Horum aſſerculorum alterum F G, qui in experimento verticalis eſſe deberet, incidi iuſſi crena E G, pro lubitu longa et lata; ſed huic admoui et clauiculis affixi laminam orichalceam G, tenui foramine pertuſam, in loco crenae tali, quem commoditas experimento neceſſaria poſtulare videbatur. His ita praeparatis machinam hanc d. 17. Martii 1739, quo thermometrum *fahrenheitianum* oſtendebat gradus 30, ita locaui, vt aſſerculus F G eſſet verticalis, et horizontali F B incumberet fruſtum informe glaciale, cuius ſectio verticalis ſit I C L K H A M. Quibus obtentis in glacie parti lateris C L, abraſis cultro eminentiis, planitiem induxi parallelam ipſi F G, eum in finem, vt deinde longitudo rectae C E, ad C L perpendicularis, eo exactius inueniri poſſit. Tum in loco arbitrario A foueolam eſſeci tenuem, ſed quae tamen per foraminulum G intuenti appareret diſtincte; et, demiſſo perpendiculo A B in lineam horizontalem, hoc dimenſus ſum, ita vt fuerit A B = 550 partibus, quarum 1000. faciunt pedem londinenſem; et recta F G = 922. part. Denique admouendo oculum foraminulo G, atque conſtanter intuendo notam in A factam, cuſpidem tenuem, dextrae ope verſus C porrectae, tamdiu hinc et inde moui, donec punctum refractionis inuenirem C, quod mihi notam in A factam obtegeret, atque adeo radium viſorium A C G, refractum in C, intercipere. Puncto itaque C ſolicite Tab. III. Fig. 1.

 notato,

notato, dimenſis porro ſum longitudines linearum, perpendicularis ad baſin C D = 700. part. F D = 713, B D = 690. part. Vnde per ſe patet neceſſe eſſe, vt baſis glaciei I M paullo ſit anguſtior parte ſuperiori, quo perpendicula C D, A B, eo tutius demitti et puncta D, B, notari queant.

§. 3. Ex his datis iam facile definiri poterit ratio refractionis in glacie. Erit enim, poſito ſinu toto = 1, ſinus anguli inclinationis E C G ad ſinum anguli refracti H C A, $= \frac{GE}{CG} : \frac{HA}{CA} = \frac{FG - CD}{\sqrt{(\overline{FG - CD}^2 + FD^2)}} : \frac{CD - AB}{\sqrt{(\overline{CD - AB}^2 + BD^2)}}$; vnde conſequitur, requiri ad experimentum inſtituendum longitudines rectarum F G, C D, F D, A B, et B D, quas omnes modo recenſitas habemus. Sin itaque ſecundum hanc regulam calculus ex datis numeris abſoluatur: obtinetur in glacie ratio ſinus anguli inclinationis ad ſinum anguli refracti = 1000 : 713. Quae ratio cum ſit in aqua pluuia vti 100 : 75, ex *Newtoni* optica, lib. II. parte 3. prop. X; apparet, confirmari hoc experimento ea, quae obſeruauit ſolertiſſimus quondam *de la Hire* generaliter tantum, vſus fruſtulo paruo glaciei, in calice vitreo formatae, conico, in commentariis acad. ſcient. *pariſinae*, ad annum 1693, pag. 252. edit. pariſ. nempe refractionem glaciei, qua deinde vſus eſt in explicandis parheliis, paullo diuerſam eſſe ac aquae; quod idem etiam obſeruauit Celeberr. *De Mairan*, in diario eruditorum gallico, ad annum 1719, pag. 580; rationem quoque addens, cur hoc ita fieri debeat, quam autem praetereo nunc, contentus confirmaſſe me ſententiam Virorum celebrium, qui hyemes, huic experimento neceſſarias, adeo fauentes experti non fuerunt.

§. 4.

§. 4. Refert *Mariottus*, in commentar. acad. ſcient. pariſ. tomo X. pag. 511. ſe vaſculum aqua repletum frigori expoſuiſſe tamdiu, donec ſumma eius ſuperficies cruſta glaciali obducta fuiſſet. Quod cum contigiſſet, perfodit cruſtam glacialem acu grandiori, et vidit, hac celeriter extracta, inſecutum fuiſſe per foraminulum factum iactum aquae duos pollices altum. Hoc experimentum, cum id d. 26. Ianuarii 1739. bis tentaſſem, mihi non ſucceſſit. Suſpicor itaque phaenomenum *mariottianum* ortum fuiſſe exinde, quod manibus calidioribus vaſculum apprehenderit, atque ſic ex hoc calore expanſionem aquae, infra cruſtam glacialem contentae, conciliauerit, ex aquae congelatione ſuperiori nullatenus oriundam.

§. 5. Inter primos philoſophos, qui glaciem eſſe aquam rareſactam, non condenſatam, opinati ſunt, referendus eſſe videtur *Galilaeus*, cui haec ſententia adſcribitur in experimentis academiae *del Cimento*, latine editis a celeberr. *Muſſchenbroekio*, pag. 127. De hoc phaenomeno hodie inter omnes conſtat quidem, ſed de menſura eius non conueniunt ſententiae, vti apparet ex libri modo citati pag. 139. et 142; neque etiam credi poteſt, glaciem omnis generis, modo magis modo minus bullis aëreis refertam, eandem habituram eſſe denſitatem. Nec veriſimile eſt, quod aſſeritur l. c. pag. 139, omnibus corporibus, excepta ſola aqua, id conuenire, vt maius habeant volumen in fluiditate, quam in firmitate ipſorum; contrarium enim ſedulo captis experimentis oſtendit *Reaumurius*, in commentar. acad. ſcient. pariſ. ad annum 1726, vbi detexit, in firmitate augeri volumen non aquae ſolius,

ſed etiam ferri, biſmuthi, et antimonii. Inueni igitur, aquam, in tubo vitreo cylindrico contentam, fluidam occupaſſe longitudinem 1168. part. congelatam vero penitus repleuiſſe longitudinem 1290. earundem partium; durante quidem congelatione ruptus fuit tubus hic aliquot in locis, ſed manſit tamen cylindricus, et ad ſenſum eiusdem diametri cum priori, partibus ruptis ſibi cohaerentibus; quare ex hoc experimento quamproxime concludi poſſe puto, eſſe denſitatem aquae ad denſitatem glaciei = 1290 : 1168 = 1000 : 905, vel circiter vti 9 ad 8, quae communis eſt ſententia. Alio autem tempore magis exactum inſtitui experimentum, capiendo fruſtum glaciei ſemilibrale circiter, ſed puriſſimae inſtar cryſtalli, et plane carentis quacunque vel minima etiam bulla aërea, aut alia heterogeneitate; huic alligando fruſtum metalli vt ſubmergeretur in aqua, et ſeligendo äeris temperiem talem, in qua nulla ſuſpicio oriri poſſet, durante ſubmerſione in aquam glaciei aliquid potuiſſe accedere, aut decedere; abſtinendo praeterea a manuum immediato vſu, ſubducto tandem calculo, in quo ratio metalli alligati habebatur, inueni denſitatem aquae ad denſitatem huius glaciei puriſſimae vti 1000. ad 916.

§. 6. Praecedenti quaeſtioni haud abſimilis eſt, quantum voluminis occupent niues et aquae ex iis collectae. In vaſculo igitur cubico aeneo compreſſi vi cuncta manuum niuem, quae recentiſſime ceciderat; atque ſic altitudinem tenebat tandem partium 93, pondus vero, ſubtracto vaſculi pondere, 225. gr. quorum 7680. faciunt libram Hollandicam. Nix haec per lenem calorem et obturato vaſculo in aquas reſoluta tenebat in eodem vaſculo

vaſculo adhuc altitudinem 59. part. et pondus 224¾. gr. vnde ſatis patet, fere nihil niuis durante regelatione per euaporationem abiiſſe, atque hinc deducitur volumen niuis compreſſae ad volumen aquae inde exortae eſſe vti 93. ad 59, hoc eſt vti 1000. ad 634. Alio tempore niuibus cadentibus expoſui vaſculum cylindricum apertum, donec libero niuis illapſu hoc impletum fuiſſet ad partes 220; niuibus omni cautione regelatis, aquae exinde collectae non replebant niſi partes 80; vnde oritur volumen niuis recenter lapſae, et ſibi relictae, ad volumen aquae ex illa generatae, vti 220. ad 80, vel vti 1000. ad 363. Patet ex his, quanta ſit differentia raritatis inter niuem libere ſibi ipſi accumulatam, et vi aliqua externa compreſſam. Diſcrepat vero vtrumque horum experimentorum ab iis, quae inſtituit *de la Hire*, in commentar. acad. ſcient. pariſ. ad annum 1712, pag. 16, vbi dicitur, niuem fuſam plerumque ſe reducere ad quintam aut ſextam partem prioris ſuae altitudinis; quanquam ibidem etiam ſermo ſit de niue valde delicata et tenui alia, quae, libere lapſa, ad duodecimam prioris ſuae altitudinis partem, in aquas fuſa, rediit. Neque etiam conſentiunt haec mea experimenta cum illis, quae annotauit celeberr. *Celſius*, in actis lit. Sueciae, ad annum 1731. pag. 42, vbi ab ipſo volumina niuis ſumme compreſſae et aquae exinde collectae reperta fuerunt vti 1000. ad 290, aut ad 362; niuis autem naturalis, ſibi relictae ad aquae exinde generatae, vti 1000. ad 85, vel 94. Ex quibus videtur concludi poſſe, pauciſſimas, aut forſan nullas inueniri niues, quae eandem raritatem teneant.

§. 7.

§. 7. Extendi vero glaciem ſenſibiliter, durante aliqua congelatione, ſequenti experimento ad oculum mihi patuit. Calici vitreo infudi aquam, expoſuique frigori acerbo; poſt aliquot temporis minuta omnis aqua circumveſtita fuit cruſta glaciali; quod cum animaduerti, calicem moderato igni admoui, effecique facile, vt omnis cruſta a ſuperficie calicis interna liberaretur, eximique poſſet glacies calicis formam referens, et aquae quam plurimum adhuc, oui inſtar, intra ſe continens. Hoc glaciale ouum, ſi appellare id ita licet, ſtatim iterum ſub dio repoſui, et vidi, antequam integra congelatio aquae reliquae incluſae perficeretur, diſruptam fuiſſe cruſtam circumcirca, facta rima $\frac{1}{5}$ pollicis lata. Simile quid tentauit *Mariottus*, in Memoires de Paris, tomo X, pag. 512; et ego plura etiam alia pericula feci huius phaenomeni cum aquis deſtillatis menthae et tiliae, atque, poſt harum factam diſruptionem, intra glaciem inueni locum ab aqua et glacie vacuum, nucis auellanae magnitudine. Ipſa igitur glacies per ſe extenditur dum generatur; neque adeo vaſa illam continentia ex facta ipſorum per frigus conſtrictione, et nimia ad glaciem cedere neſciam facta tenſione, diffringuntur, quae quorundam fuit opinio, in experimentis academiae *del Cimento* pag. 136; praecipue autem *Perralti*; vide *G. A. Hambergeri* diſſertationem de frigore, pag. 96.

§. 8. Vaſculum figulinum, intus encauſto obductum, aqua repleui d. 11. Febr. 1739, quo die thermometrum *fahrenheitianum* 9 gradus infra o oſtendebat; et libero aëri expoſui, vt aqua in glaciem tota abiret; quod cum factum putarem, vaſculo adhuc integro, illud reportaui

taui in muſeum, et glaciei ſuperaffudi aquam nouam, quae aliquamdiu in muſeo calefacto ſeruata ante erat. Vix abſolueram recentem hanc affuſionem, cum ſubito, nec ſine ingenti fragore, vaſculum medium diſrumpebatur; et in glacie, a vaſculo libera, diſſecta inueni adhuc locum, aqua ſpumoſa refertum, nucis auellanae magnitudine. Videtur hoc phaenomenum eapropter accidiſſe, quod aqua, glaciei recens affuſa, calidior, hanc ad ampliorem voluminis menſuram extendit; ex quo factum eſt, vt vas fictile, ob glaciem expanſam ſatis iam extenſum, et vix adhuc ruptioni reſiſtens, hanc, modica accedente vlteriori dilatatione, tandem fuerit paſſum. Habet, vti arbitror, hoc experimentum cohaerentiam et connexum cum alio plane mirabili caſu, quem obſeruauit Illuſtris *Friewaldus*, anno 1730; qui, cum vas vitreum oblongum aqua repletum, diabolos *carteſianos* ſic dictos continens, in conclaui non calefacto reliquiſſet, et iam a congelatione aquae periculum inſtrumento metueret, ſubito acceſſit, vt id muſeo calefacto inferret. Offendit aquam adhuc liquidam; ſed cum veſicam ſuperne alligatam digito premeret, vt ſubſiderent imagunculae: dicto citius omnis aqua abiit in lamellas tenues glaciales, atque ſic initium congelationis fecit. Legitur hoc experimentum in tranſact. *anglican.* nro. 418, pag. 79, ſine explicatione phaenomeni; quam demum adiecit Cel. *Hollmannus*, in nouis litterariis göttingenſibus ad 10. Ianuarii 1743. Hic enim plurimis captis tentaminibus deprehendit tandem, ſolum calorem aut manuum, aut conclauis calidioris, accedentem ad aquam liquidam adhuc quidem, ſed penitus frigefactam et congelationi proximam in cauſſam hic aduocari debere. Quam explicationem certe experimen-

tum meum optime confirmare videtur. Aqua enim a frigore iam penetrata, et in limine quaſi glaciei conſiſtens, modica extenſione opus habet, vt primitias congelationis referat; hoc extenſionis ſupplementum largiri ipſi poteſt calor ſubito allapſus, qui citius congelationem efficit dilatando, quam calefaciendo ad ſtatum liquidum reuocat. Apparet quidem paradoxum omnino, calore promoueri congelationem: ſed permittit hoc natura aquae ſingularis, vtpote quae a ſtatu intermedio, qui nempe congelationi proximus eſt, vtrinque volumine ſuo increſcit, illinc, ad ebulltionem vsque, augetur voluminis ſui parte $\frac{1}{26}$, vid. Celeb. *Muſſchenbroekii* elem. phyſ. §. 515.; hinc per gelationem idem volumen iterum incrementum capit parte $\frac{1}{8}$ voluminis, quod ex vulgari proportione denſitatis aquae frigidae ad denſitatem glaciei vti 8 ad 9 conſequitur; vt igitur aqua congelationi proxima minimum voluminis habere cenſenda ſit. Quicquid igitur extenſionem aquae in ſtatu intermedio poſitae promouet: poteſt eius etiam conglaciationem promouere; ſiue per calorem ſubitaneum affluentem id fiat, ſiue per aliam cauſſam.

§. 9. Vi aquae in glaciem abeuntis diffregerunt *Academici florentini* olim vaſa variae figurae, argentea, cuprea, aurea, vitrea, orichalcea et ferrea, de quibus legi poſſunt experimenta academiae *del Cimento*. Eadem vi vt disrumperetur tubus ferreus, bombardarum vſui adhiberi ſolitus, effecerunt *Chriſtianus Hugenius* anno 1667, et poſt eum Pariſiis *Buottus*, anno 1670, tandemque etiam *Iſrael Conradi*, medicus gedanenſis anno 1677. Tentaui igitur et ego idem perficere ſequentibus circumſtantiis. Cepi talem tubum ferreum, bombardae deſtinatum, ſed fora-

foramine incendiario nondum praeditum, cylindricum, cuius diameter anterior integra erat pedis rhenani partium milleſimarum 77, diameter vero cauitatis 57. Ad eius extremum poſterius, quod cochlea ferrea occludi ab artificibus ſolet, affudi inſuper adhuc circumcirca metallum fuſum, vt tuta hic redderentur omnia ab exitu aquae intromittendae. Maior vero cura adhibenda erat in parte anteriori; vbi igitur obturaculum ferreum, bene adaequatum, et clauo adhuc transuerſo munitum, adaptaui. His ita praeparatis impleui integrum tubum aqua recenti, obturaculum ſupene intruſi, clauo transuerſo munii, atque tum demum adhuc integram hanc faciem anteriorem liquefacto metallo prolixe circumfudi. Tum die 9. Nouembris 1737, hora poſt meridiem quarta, expoſui eum aëri libero, frigenti mediocriter, ad gradus ſcilicet 24. thermometri fahrenheitiani; atque hora vndecima nocturna eundem iam disruptum inueni, in loco eius, quantum colligere potui, debiliſſimo, in quo nempe ferrumine coniunctus erat, quales omnes eiusmodi tubi ſunt. Fiſſurae longitudo fuit partium modo memoratarum 146, amplitudo autem maxima 15, extra quam multum glaciei prominuit, ad altitudinem circiter 16. partium; et fiſſurae quidem vna pars eleuata manifeſtoque extrorſum preſſa apparebat, altera vero ſitum ſuum retinebat priſtinum.

§. 10. Quomodo inuenienda ſit temperies duorum miſcibilium, eiusdem conſiſtentiae, ſed diuerſae temperiei, ſi inuicem miſceantur, primus propoſuit *Morinus*, in „aſtrologia gallica, pag. 158. dicit enim: hac de re, „quod ſciam, nemo hactenus quidquam determinauit.

 Me-

Methodum ipſius ſoluendi hoc problema hic apponam, quia ſingularis eſt, nec multum ab experimentis abludit. Ita autem ratiocinia ipſius valde obſcura et inuoluta reduxi ad calculum generalem ex ipſius numeris ſpecialibus, non ſine multa opera. Sint duo fluida, frigidius primum, cuius gradus caloris $= m$, quantitas materiae $= a$; et „quoniam philoſophorum communis eſt ſententia, inquit „*Morinus*, mixtum admittere duntaxat octo gradus con„trariarum qualitatum: erit in eodem hoc fluido ſimul gradus frigoris $= 8 - m$. Alterum fluidum ſit calidius, et quidem in eo gradus caloris $= n$, frigoris $= 8 - n$, quantitas materiae $= b$. Sit ergo ſecundum *Morinum* quantitas frigoris producti in calido $= x$, et quantitas caloris producti in frigido $= y$; ſtatuit is, eſſe primo $x : y = \overline{8 - m} . a : nb$, vnde $y = \frac{nbx}{(8 - m)a}$; eſſe etiam ſecundo $x + y = (8 - m) - (8 - n) = n - m$, vnde $y = n - m - x$; ex quibus aequationibus combinatis inter ſe oritur $x = \frac{(8 - m)(na - am)}{nb + 8a - am}$. Erit ergo in mixto productus gradus frigoris $= x + 8 - n$, et conſequenter gradus caloris in mixto $= 8 - x - 8 + n = \frac{n^2 b + \overline{8 - m} . ma}{nb + \overline{8 - m} . a}$. Formula haec generalis duo exempla, ab ipſo *Morino* allata, perfecte producit. In primo eſt $a = b$, $m = 2$, $n = 4$, quibus ſubſtitutis fit caloris gradus in hoc mixto $= 2\frac{4}{5}$, et frigoris $= 8 - 2\frac{4}{5} = 5\frac{1}{5}$; in ſecundo habet $m = 1$, $a = 2$, $n = 6$, $b = 3$, ex quibus numeris fit in mixto gradus caloris $= 3\frac{13}{16}$, et gradus frigoris $= 4\frac{3}{16}$, vti habet auctor in loco adducto, vbi mirum ſane eſt haec inueniri in libro nugis aſtrologicis ceterum refertiſſimo.

§. 11.

§. 11. Sed vt eruere poſſim pro gradu caloris in aliquo mixto formulam generalem magis in natura rei fundatam, atque ad gradus caloris in thermometro *fahrenheitiano* accommodatam, ſequenti modo hoc problema conſideraui. Sint ingredientis vnius fluidi frigidioris, vt ante, caloris gradus $= m$, maſſa $= a$; alterius vero fluidi calidioris caloris gradus $= n$, maſſa $= b$, et gradus caloris in mixto $= x$, et ſint indeterminatae α, β, γ, δ, poſtea determinandae. Ponam nunc eſſe $x = \frac{\alpha m + \beta n}{\gamma a + \delta b}$. Patet iam, ſi formula haec veritati congruere debet, requiri in ea, vt primo, poſito $n = m$, fiat $x = m$; ex hac ſubſtitutione oritur $\beta = \gamma a + \delta b - \alpha$, et formula acquirit hunc ſtatum, $x = \frac{\alpha m + \gamma a n + \delta b n - \alpha n}{\gamma a + \delta b}$; ſiue $x = \frac{(\gamma a + \delta b) n - (n - m) \alpha}{\gamma a + \delta b}$; ſecundo requiritur, vt poſita $a = \infty$, fiat $x = m$; ſed poſita $a = \infty$, fit $\gamma a + \delta b = \gamma a$, quia b reſpectu ipſius a euaneſcit; manet autem $n - m$, quae differentia calorum infinito aeque competit ac finito; ergo deducetur hinc $m = \frac{\gamma a n - (n - m) \alpha}{\gamma a}$, hoc eſt, $\gamma a (n - m) = \alpha (n - m)$, aut $\gamma a = \alpha$, qui valor ſubſtitutus efficit $\beta = \delta b$, et formulam generalem mutat in hanc ſequentem, $x = \frac{\gamma a m + \delta b n}{\gamma a + \delta b}$; tertio requiritur etiam vt poſita $b = \infty$, fiat $x = n$; ſed hoc formula modo determinata iam efficit; in qua igitur omnes reſpectus continentur, quos ratiocinium deſiderare poteſt.

§. 12. Vt igitur iam determinentur etiam reliquae indeterminatarum γ et δ: feci omni cura experimentum ſequens. Cepi aequales portiones aquae frigidioris ad 44. gradus Thermometri *Fahrenheitiani*, et calidioris ad 120.

 gradus

gradus; mixtae ſecum hae dederunt gradum 76. Alias duas aquae portiones aequales, frigidioris ad 64, calidioris ad 111½, vidi producere gradum 84. In applicatione igitur ad formulam noſtram eſt $a = b$, $m = 44$, $n = 120$ $x = 76$, quibus ſubrogatis exiſtit $\gamma = \frac{11\delta}{8}$, et formula generalis nunc induit hanc faciem, $x = \frac{11am + 8bn}{11a + 8b}$, quia δ per diuiſionem eliminatur. Quae igitur formula cognoſcendo gradui caloris in aliquo mixto fluido inſeruiet. Eſt igitur ex his incrementum caloris, quod oritur in mixto $= x - m = \frac{8b(n-m)}{11a + 8b}$; et ſi maſſae vtrinque ſint aequales, aut $a = b$, erit incrementum $= \frac{8}{19}(n-m)$, proportionale itaque differentiae calorum vtriusque ingredientis. Hoc corollarium autem ex formula prius reperta $x = \frac{\gamma am + \delta bn}{\gamma a + \delta b}$, quae ex principiis neceſſariis deducta eſt, iam conſequitur; eſt enim, vi huius, incrementum caloris in mixto $= x - m = \frac{\delta b(n-m)}{\gamma a + \delta b}$, et, ſi $a = b$, idem incrementum eſt $\frac{\delta}{\gamma + \delta}(n-m)$; vnde veritas huius conſectarii a priori, et neceſſario, conſtare poteſt.

§. 13. Deducuntur ex generali inuenta expreſſione hac ſatis egregie phaenomena ſequentia, quae in experimentis ad hunc finem inſtitutis obſeruaui anno 1739. Accepi nempe primo aquae calidae ad gradus 42, menſuras 4, quae menſura continebat circiter 1½ pollicem cubicum; huic affudi aquae feruentis ad gradus 212 menſuram vnam, deditque mixtum gradus 68; adiecta menſura ſecunda huic mixturae produxit gradus 80, reliquos docet ſequens tabella:

Affuſa

Affuſa menſura		1ª	dedit gradus	68
		2ª	- - -	85
		3ª	- - -	98
		4ª	- - -	107
		5ª	- - -	113
	A.	6ª	- - -	118
		7ª	- - -	123 B.
		8ª	- - -	128
		9ª	- - -	130
		10ª	- - -	134.

Alio tempore, eadem vſus menſura, cepi aquae calidae ad gradus 38 menſuras 20, atque his affudi ſucceſſiue ſingula paria aquae ebullientis; cumque affunderem par primum, obortus fuit calor 52 grad. et ſic porro, vti tabella haec oſtendit.

Affuſum par	1mum	dedit gradus	52
	2um	- - - -	62
	3um	- - - -	72
	4um	- - - -	80
	5um	- - - -	85
	6um	- - - -	91
	7mum	- - - -	97
	8um	- - - -	103
	9um	- - - -	108
	10mum	- - - -	111
	11mum	- - - -	115
	12mum	- - - -	117
	13um	- - - -	119

A. 14um	- - - - - 122	
15um	- - - - - 124	B.
16um	- - - - - 125	
17^{mum}	- - - - - 126	
18um	- - - - - 128	
19um	- - - - - $128\frac{1}{2}$	
20^{mum}	- - - - - 129.	

Vt hae obſeruationes ad calculum noſtrum reuocentur, conſideretur ex. gr. in caſu prioris tabulae, qui ſignatus eſt litera A, adfuiſſe menſuras aquae 10, calentis ad gradus 118, affuſam autem fuiſſe menſuram vnam aquae calentis ad gradus 212, et prodiiſſe calorem B 123 graduum. Erunt igitur in hoc caſu $a = 10$, $m = 118$, $b = 1$, $n = 212$, et prodit $x = \frac{11.10.118. + 8.1.212}{11.10. + 8.1} = 124$, qui gradus ſatis bene cum obſeruatione congruunt. In tabula poſteriori ſumatur ex. gr. obſeruatio notata A, atque erit ibi a 48, $m = 122$, $b = 2$, $n = 212$, vnde exſurgit $x = \frac{11.48.122 + 8.2.212}{11.48. + 8.2} = 124$, qui numerus exacte cum gradu obſeruato conuenit.

§. 14. Videamus nunc, in quibus aeſtimatio caloris in mixto producti *moriniana* prius (§. 10.) adducta, diſcrepet a noſtra. Eſt ibi huius caloris incrementum $= \frac{n^2b + (1-m)ma}{nb + (1-m)a} - m = \frac{nb(n-m)}{nb - ma + 1a}$, vel, ſi portiones vtriusque ingredientium ſint aequales, aut $a = b$, eſt dictum incrementum $\frac{n(n-m)}{n-m+1}$, ergo in hac aeſtimatione incrementum caloris in mixto non eſt in ratione ſimplici differentiae calorum ingredientium, quod tamen neceſſario eſſe debere antea demonſtraui; vnde aeſtimatio *moriniana* fallit,

lit, ſed ad verum tamen, quod mirandum eſt, vtcunque accedit. Facile perſpici poteſt, fluidi maſſam, vt a, caloris m, mixtam cum fluidi maſſa, vt b, caloris n, eumdem producturam eſſe calorem, quem producit fluidi maſſa, vt pa, caloris n; ſed idem etiam oſtendit formula noſtra, in qua ſi ponantur $a = pa$, et $b = pb$, prodit $x = \frac{11pam + 1pbn}{11pa + 1pb}, = \frac{11am + 1bn}{11a + 1b}$; quod idem etiam efficitur per *Marini* formulam. Supereſt vero formulae meae vnica adhuc difficultas, auctoritas nempe Viri merito ſuo etiam poſt fata illuſtris, *Boerhauii*, qui in elementor. chemiae tomo I. de igne, experim. XX, corol. 11. pag. 269, aſſerit, aquae duas portiones aequales, vnam caloris graduum 32, alteram graduum 212, illam ſcilicet gelaſcentem, et hanc bullientem, miſtas inter ſe efficere calorem graduum 90, qui dimidius eſt differentiae vtriusque caloris; qui caſus ad formulam noſtram applicatus praebet $a = b$, $m = 32$, $n = 212$, vnde fit x, ſiue calor aquarum inter ſe miſtarum, $= 107 \frac{15}{19}$; ſed, facto, die 21. Aprilis 1744, experimento, peculiariter huic fini deſtinato, deprehenſum eſt, reſpondere huic mixtioni gradus 107 vel 108, vti calculus meus poſtulat.

§. 15. Inquiſiturus in elaſticitatem glaciei ſequentia inſtitui experimenta. Primo paraui, non ſine multo labore, duos globos glaciales, diametri circiter duorum pollicum, ex aqua diu et multum cocta, aequalis inter ſe ponderis, et bene pellucidos; hos ſuſpendi in machina *graueſandiana* colliſionum, deſcripta in phyſices elementis mathematicis, editis 1725, pag. 126, atque effeci, vt in alterutrum quieſcentem incurreret alter celeritatibus

 ſuc-

ſucceſſiue vt 16 et 20, quibus quieſcens obtinuit celeritates reſpectiuas vt $9\frac{3}{4}$ et $11\frac{1}{2}$; et globus incurrens poſt colliſionem paullo etiam reſiliit. Patet ex regulis colliſionum generalibus, ſi glacies ſpectetur vt corpus molle, celeritates ortas ex colliſione futuras fuiſſe, vt 8 et 10, cum igitur obſeruatae fuerint paullo maiores: patet etiam, donatam eſſe quidem glaciem aliqua elaſticitate, ſed admodum parua; nam ſi conſideretur vt perfecte elaſtica; ortae fuiſſent celeritates vt 16 et 20. Idem conſequitur etiam ex aliis experimentis quae inſtitui, cum nempe globo eburneo, cuius pondus 7 lothonum, quieſcenti, immiſi glacialem globum 5 lothonum, celeritatibus vt 10, 15, 20, quae produxerunt poſt colliſionum celeritates reſpectiuas vt $5\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{4}$, et $9\frac{1}{2}$; aut cum iterum duos globos glaciales, quorum pondera erant vti 194 et 159, inter ſe commiſi, quieſcente maiori, et minori incurrente cum celeritatibus vt 5, 10, 15, 20, ex quibus ortae fuerunt poſt colliſionem celeritates reſpectiuae maioris globi vt 3, 6, 9, $11\frac{1}{2}$.

§. 16. Cum anno 1739. d. 8. Febr. äer liber eſſet frigidus ad 1. gradum infra 0, expoſui eidem fluida ſequentia, omnia calida ad gradus 48. Et *aqua* quidem *ſalſa* mediocriter ſale communi tenuem cruſtam glaciei, ſed fortem tamen, contraxit ſpatio 1. horae 10. min. diu ante apparebat quaſi coagulata, et mollis inſtar cerae, nec niſi poſt ſex horas tota in glaciem mutata fuit albam, cui aliquid ſalis ſuperne quaſi aſperſum erat, et opacam. Aqua multum ante *cocta* tenuem glaciei cruſtam, ſed fortem, induxit poſt 19. minuta prima, et poſt tres horas integras in glaciem abiit paullo pellucidam. Idem acci-

accidit *aquae fluuiae*, et in eodem quidem tempore, ſed haec produxit glaciem magis opacam et impuram. Falſum igitur eſſe puto, quod aſſerit *Hartſoekerus*, in phyſicae ſuae pag. 150. aquam coctam citius congelari quam non coctam, ob äeris in illa abſentiam; falſum etiam videtur, quod ſtatuitur in Memoires de Trevoux 1701. m. Ian. pag. 161, glaciem ex aqua äere orbata tardius formari, quam ex ordinaria. *Cereuiſia domeſtica*, mediocris virtutis, glacie obtecta fuit poſt 1. hor. 25. min. et *vinum rubrum gallicum* poſt 1. hor. 45. min. vtrumque diu ante coagulatum erat inſtar cerae mollis; ſed poſt 6. horas vtrumque integrum in glaciem abiiſſe obſeruaui. *Spiritus vini gallicus* d. 5. Febr. 1739. duram glaciem induxit, ſed tenuem, condenſatus infra, poſt aliquot horarum ſpatium, in frigore äeris liberi 14. grad. infra 0. Alio tempore aquam fluuiam calentem ad gradus 48. expoſui äeri libero, ſed obtectam vitro maiori, quae cruſtam tenuem glacialem contraxit poſt 55. min. adeoque multo tardius, quam ſi non fuiſſet obtecta. Alio iterum tempore, quo äer calebat ad gradus 13, expoſui ei aquam fluuiam, calentem ad gradus 45, quae poſt 14. min. tenui cruſta obducta, et poſt 3. horas 35. min. integra in glaciem conuerſa fuit; aequalis portio aquae eiusdem, et aeque calens, ſed cui ſuperaffuſum erat oleum nucis ad altitudinem ⅘ poll. conglaciari coepit poſt 19. min. multis virgis et haſtis deorſum tendentibus; poſt 3. horas 35. min. tota congelata erat, dum oleum ſuperne interim adhuc eſſet pellucidum et illaeſum plane a frigore; congelatio igitur aquae, dicto oleo obtectae, eodem tempore conſecuta eſt, ac ſi libera fuiſſet, nec per 30. min tardius

dius ſolito accidit, vti refert *Gauteron*, in Memoires de l'Academ. des Sciences, 1709 pag. 454. In frigore ſaeviſſimo anni 1739. d. 7. Decemb. vbi äer frigebat ad 16. gradus infra 0, expoſui libero äeri huic aquas deſtillatas tiliae, menthae, et cardui benedicti, in quibus cruſta glacialis apparuit poſt 5. min. et quae poſt 42. min. integrae in glaciem verſae erant.

§. 17. Examinaui etiam gradus caloris fluidorum aliquot ebullientium, hac cautela, vt vas, in quo coquebantur, obtectum eſſet aſſere querno ſatis amplo, per cuius foramen paruum aliquod ſactum bullam thermometri *fahrenheitiani*, ab optimo artifice *Prinz* elaborati, et ad gradus 600. extenſi, transmiſi, vt ea ſola calorem ſentiret, nec vllus vapor calidus aſcendens obſeruationi nocere poſſet. In his circumſtantiis inueni gradum caloris ebullientis *lactis* bubuli 210; *vini* rubri gallici 199; *ſpiritus vini* gallici 181; barometro tenente altitudinem mediocrem, ſcil $29\frac{41}{100}$ poll. londinenſ. Alio tempore, quo idem barometrum eleuatum erat ad $29\frac{8}{100}$ poll: erat gradus ebullientis *vini* rhenani generoſi, 200; et *cereuiſiae* vulgaris 204.

§. 18. Aquae calentes, libero äeri expoſitae, ſenſim ſenſimque calorem perdunt ſuum, donec is reducatur ad eum gradum, qui äeri ambienti inhaeret. Non immerito itaque quaeritur, in qua proportione haec fiat refrigeratio. Inſtitui igitur experimentum, et aquam calentem ad gradus 112. infudi vitreo calici, cui ſimul immiſi thermometrum *fahrenheitianum*, cuius ſola bulla aquis obtegebatur; gradus caloris in äere libero erat tum 76. grad. cui expoſui aquam hanc, et ſingulis minutis primis

gra-

gradum aquae remiſſiorem obſeruaui, quos vero omnes hic adſcribere inutile eſt, vnde ſolos ſequentes affero:

h.	*'*	*grad.*	*h.*	*'*	*grad.*	*h.*	*'*	*grad.*
2.	11. p. m.	112.	2.	27.	94½.	2.	53.	82.
	12. - -	110.		29.	93.		57.	81.
	13. - -	109.		34.	90.	3	0.	80½.
	15. - -	106½.	*	36.	89.		5.	79.
	17. - -	104.		38.	88.		12.	78.
	20. - -	101.		42.	86.		15.	77¾.
	22. - -	99.		47.	84½.		19.	77.
	25. - -	96.		50.	83.		26.	76½.
							32.	76.

Abſoluta vltima harum obſeruationum, thermometrum äeri libero denuo expoſitum vidi adhuc monſtrare gradus 76. In hoc experimento ſi ponamus tempus elapſum $= t$, gradum caloris aquae initialem $= i$, gradum caloris äeris ambientis $= g$, et conſtantem arbitrariam, ex caſu aliquo experimenti determinandam $= \alpha$, videbimus omnes numeros ſatis bene prodire, ſi decrementum caloris pro quolibet caſu ſtatuatur $= \alpha (i-g) \sqrt{t}$. Sed vt determinetur arbitraria α, ſumamus ex hoc Experimento caſum, in quo, tempore $2^h\ 36'$ gradus caloris in aqua reſiduus erat 89. Eſt igitur in hoc caſu $t = 25$, atque $i-g = 112-76 = 36$, et decrementum caloris praeſentis ab initiali $= 112 - 89 = 23$, ergo debet eſſe $36 \alpha \times 5 = 23$, vnde oritur $36 \alpha = \frac{23}{5}$, et formula determinata fit $\frac{23}{5} \sqrt{t}$, quae reliquis caſibus ſatis bene reſpondet; adeoque credi poteſt, generaliter eſſe in hoc experimento et ſimilibus decrementa caloris in ratione ſubduplicata temporis elapſi.

§. 19. Legitur in experimentis academiae *del Cimento* pag. 179, obſeruatio valde memorabilis, fruſtum ſcilicet glaciei, pondus 500. libr. tenens, oppoſitum ſpeculo cauo, repercuſſiſſe frigus ad thermometrum. Cupidus admodum ſpectandi hoc phaenomenum, curaui duo fruſta glacialia, dura, et valde pellucida, ita locari, vt parietem quaſi formarent altum 4. pedes lond. long. 5, et craſſum 2, ſuperficiem itaque tenentia ſimul 20. pedum quadratorum, et ſoliditatem 40. pedum cubicorum, qui pondus adeoque glaciale effecerunt 2280. librarum, poſitis denſitatibus aquae et glaciei vt 9½ ad 8, et pondere pedis cubici aquae 64. libr. Habui igitur maſſam glaciei puriſſimae maiorem quam quadruplam illius, quam habuerunt *Academici florentini*; cui oppoſui ſpeculum cauſticum metallicum, in quo amplitudinis diameter eſt 2¼ pedum lond. In focum huius ſpeculi collocaui bullam ſuperiorem thermometri *drebbeliani*, quod genus thermometrorum in his et ſimilibus caſibus maxime ſe commendat ob inſignem et ſumme conſpicuam, ex minimo frigore vel calore, mobilitatem. His ita praeparatis integrum ſpeculum obduxi velamento laneo, atque tamdiu expectaui, donec thermometrum in perfecto ſtatu quietis eſſet; quo obtento, reuelaui ſubito ſpeculum, et ſolicite attendi ad mutationem thermometri, ſed ne minimam quidem vnquam obſeruaui, etiamſi in variis ſpeculi a glacie diſtantiis variisque aëris caloribus experimentum repetitum fuerit; prima quidem vice menſe Martio anni 1740, adſpectantibus id Illuſtri *Ioh. Alberto Korſio*, Academiae tum temporis Praeſide, et Academicorum praeterea multis. Cum vero Clariſſ. Profeſſor *Heinſius* idem

idem hoc experimentum in peculiari hac circumſtantia adhuc inſtitui cuperet, in qua calor aëris circumfluі maior eſſet quam glaciei, qui 32. gradibus maior eſſe nequit: hinc operam dedi, vt die 10. Martii anni 1744. hora a. m. circiter 11., quo tempore äer circumfluus calorem tenebat 37. graduum thermometri *fahrenheitiani*, adhibitis praecedentibus cautelis, eadem denuo peragerentur, coram praeſentibus Academiae Profeſſoribus *C. N. De Winsheim*, *G. Heinſio*, et Academiae Adiuncto, *Gellerto*, vbi omnibus nobis varie hinc et inde rem tentantibus patuit tandem, ne in hoc quidem caſu vllum frigus a glacie, mediante ſpeculo, ad thermometrum repercuti.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, INSTITVTAE PETROPOLI ANNO 1742,

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§ 1.

Currente hoc anno 1742. obſeruatae fuerunt a me altitudines barometri ſimplicis, et hucusque ad hos vſus vocati, ſingulis menſibus maximae et minimae, ſequentes, in quibus, vti hucusque ſolitus ſum, numeris ante punctum poſitis denoto partes duodecimas, ſiue pollices, pedis londinenſis; numeris autem poſt punctum poſitis deſigno horum pollicum partes centeſimas.

		max.	min.	diff.
1742.	Ianuarius	30. 25	29. 02	1. 23
	Februarius	30. 26	29. 02	1. 24
	Martius	30. 15	28. 66	1. 49
	Aprilis	30. 10	29. 40	0. 70
	Maius	30. 18	28. 88	1. 30
	Iunius	29. 98	29. 48	0. 50
	Iulius	30. 02	29. 27	0. 75
	Augustus	30. 05	29. 20	0. 85
	September	30. 25	29. 25	1. 00
	October	30. 30	29. 33	1. 97
	Nouember	30. 21	29. 30	0. 91
	December	30. 45	28. 94	1. 51

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 45, quae obſeruata fuit die 14. Decembris, circa meridiem, in ſerenitate coeli imperfecta, nebulis mane et veſperi aërem inuoluentibus; cum ſubſequente niue modica, ſpirante nullo vento ſenſibili, ſed frigore regnante acerbo, ad 13 gradus infra o thermometri fahrenheitiani. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737 obſeruata fuit 30. 95 non excedit, haec etiamnunc manet omnium hic loci obſeruatarum maxima. Minima barometri altitudo fuit hoc anno 28. 33, obſeruata die 24 Octobris, cadente copioſa niue, frigore leni, et flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inventam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum barometricarum antea ſtabilitum, nimirum 2. 77; ſuntque etiam adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem in mediis, exceptis ſolis menſibus duobus.

§. 3. Auroras boreales hoc anno obſeruaui ſequentes.

1742. Februarii 18. Lux borea, multis virgis et longis conſpicua, flante mediocri Euro.

Martii 1. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta; flante tenui Euro.

2. Lux borea tranquilla, in ſerenitate iterum perfecta; nullo flante vento.

14. Lux borea in arcu quieſcente, et coelo ſereno.

15. Lux borea magna, et irrequieta, coelo perfecte ſereno.

Martii 16. Lux borea debilis, aëre ſereno et quieto.

17. Lux borea humilis et tranquilla, flante mediocri Euro, et coelo ſereno.

24. Lux borea tranquilla, coelo ſereno, flante mediocri Borea-Euro.

29. Lux borea humilis, in qua pauci radii aſſurgebant, in ſerenitate perfecta, et lucente Luna.

30. Veſtigia lucis boreae.

Aprilis 1. Veſtigia lucis boreae, coelo ſereno.

2. Veſtigia lucis boreae; coelo iterum ſereno.

5. Lux borea in ſerenitate perfecta.

11. Lux borea alta et vaga, coelo ſereno.

12. Lux borea in arcu multum eleuato, et trabibus, ad eius extrema aſcendentibus, conſpicua.

Auguſti 15. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta.

19. Lux borea, emittens copioſas et longe protenſas virgas, in ſerenitate perfecta.

Septembris 15. Lux borea tranquilla, coelo ſereno, flante tenui Auſtro-Zephyro.

16. Lux borea tranquilla, coelo ſereno.

18. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta.

Sep-

Septembr. 27. Lux borea magna et diffuſa, coelo fere integro ſereno.

Octobris 15. Lux borea humilis et tranquilla, flante forti Borea-Zephyro, coelo ſereno.

16. Lux borea humilis et quieta, flante adhuc mediocriter praecedente vento, in ſerenitate perfecta.

18. Lux borea valde humilis, coelo ſereno, et aëre frigeſcente.

Nouembris 13. Veſtigia lucis boreae inter nubes.

15. Veſtigia lucis boreae inter nubes iterum.

Decembris 5. Lux borea inter nubes manifeſta, flante tenui Borea, frigore mediocri.

13. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta, et frigore intenſo, 12. graduum infra o, thermometri fahrenheitiani.

23. Veſtigia lucis boreae ortum verſus, inter nubes.

24. Radii tenues lucis boreae inter nubes.

§. 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno die 17. Octobris, eaque vniuerſalis, poſt praecedentem lucem boream, in ſerenitate perfecta. Maximum frigus huius anni incidit in diem 14. Decembris, quo, poſt perfectam ſerenitatem mane hora 7. thermometrum fahrenheitianum deſcendit vsque ad 13 gradus infra o, flante forti Borea.

Frigus praeterea paullo minus acre experti ſumus hoc anno diebus Ianuarii 2, 9, 11. Martii 2. Decembris 3, 13, 15, qui omnes dies thermometrum modo dictum ad minimum in gradu 0 depreſſum tenuerunt. Aprilis diebus 21, 22, et 23, poſt longam degelationem nouae inciderunt congelationes matutinae ad gradus 29 thermometri fahrenheitiani; idem accidit adhuc Maii diebus 2, 5 et 9, in quorum vltimo omnis tellus recenti niue tecta erat. Calorem aeſtati debitum vix ſenſimus ante diem 25 Iunii, quo thermometrum fahrenheitianum, aëri vmbroſo expoſitum, monſtrauit gradus 80. Idem oſtendit quoque libero ſoli expoſitum, tempore poſtmeridiano ſequentia:

Aprilis	16	- - - - -	68. gradus.
Maii	31	- - - - -	107.
Iunii	26	- - - - -	101.
Iulii	13	- - - - -	105.

§. 5. Tonitrua audita fuerunt hoc anno, *Aprilis* 28. Iunii 8, 9, 15, 18, 19. Iulii 1, 2, 3, 10, 17, 21, 25. Fulgura ſola viſa ſunt Februarii 12, hora 8 veſpertina, ex relatione aliorum, coelo nubibus obducto, flante mediocri Auſtro-Zephyro; nec non Decembris 9, hora 10 nocturna; ipſe vero talia vidi Decembris 18, hora 8 nocturna, coelo nubilo, et aëre quieto. Coruſcationes porro apparuerunt Iunii 27, hora 11 nocturna, Auſtro-Eurum verſus; et hac nocte circa Pragam in Bohemia grauis tempeſtas exorta fuit, qua duodecim Galli fulmine icti ſunt, teſtibus nouis publicis; Iulii 21 hora 9 nocturna frequentes et amplae ortum verſus; et Iulii 22 cum perfecta ſerenitas eſſet.

§. 6.

§. 6. Altitudines pluuiarum, et niuium liquefactarum, ex obſeruationibus Clariſſ. *Richmanni* hoc anno fuerunt ſequentes, in pollicibus et partibus centeſimis pedis londinenſis.

1742.	Ianuarius - - -	1.	43.
	Februarius - - -	0.	62.
	Martius - - -	1.	25.
	Aprilis - - -	0.	75.
	Maius - - -	2.	57.
	Iunius - - -	7.	85.
	Iulius - - -	2.	99.
	Auguſtus - - -	1.	52.
	September - - -	1.	88.
	October - - -	1.	55.
	Nouember - - -	1.	64.
	December - - -	1.	04.
	ſumma	25.	09.

§. 7. Ventos vehementes experti ſumus hoc anno diebus ſequentibus: Ianuarii 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29. Februarii 3, 7. Martii 5, 6, 9, 10, 11, 13, 27, 28. Maii 1, 3, 4, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24. Iunii 2, 5, 22. Iulii 7, 25. Auguſti 12, 13, 31. Septembris 15. Octobris 2, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 28, 29. Nouembris 26, 27. Decembris 3, 4, 11, 13, 22, 23, 24, 30, 31. Inter hos procellae furentes fuerunt diebus Maii 3, 15. Iulii 25. Octobris 2, 15, 23, 24. Decembris 24. Nebulae inſignes obortae ſunt Ianuarii 1. Februarii 5, 10, 16. Martii 16. Auguſti

12. Septembris 28. Octobris 8. Nouembris 5. Decembris 11, 14, 16. Primae denique hirundines viſae ſunt Maii 14.

§. 8. Halones circa Lunam conſpectae fuerunt Ianuarii 11. Auguſti 9. Nouembris 27, et Decembris 24. Iridis ſegmenta apparuerunt, ſine pluuia, Iulii 13, integrae vero, et ordinariae Iulii 21, et Auguſti 14. Grando praecipitans et horrida, qua omnis tellus obtecta fuit, cecidit Iunii 9, in qua magnum vidi numerum granorum, quae nucis auellanae magnitudinem ſuperabant; cum per aliquot dies antecedentes venti omnes ſiluiſſent, durante grandine Boreas mediocris exortus eſt. Aliae minores grandines ſecutae ſunt Auguſti 14, ſine vento comitante, et Septembris 15, flante mediocri Auſtro-Zephyro.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE,

INSTITVTAE PETROPOLI ANNO 1743,

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§ 1.

Currente hoc anno 1743. obſeruatae fuerunt a me altitudines barometri ſimplicis, et hucusque ad hos vſus vocati, ſingulis menſibus maximae et minimae, ſequentes; in quibus, vti hucuſque ſolitus ſum, numeris ante punctum poſitis denoto partes duodecimas, ſiue pollices pedis londinenſis; numeris autem poſt punctum deſigno horum pollicum partes centeſimas.

			max.		min.		diff.
1743	Ianuar.	—	30. 06	—	28. 58	—	1. 48
	Febr.	—	30. 33	—	28. 95	—	1. 38
	Mart.	—	29. 93	—	28. 84	—	1. 09
	Aprilis.	—	30. 25	—	29. 30	—	1. 22
	Maius	—	30. 04	—	28. 94	—	1. 10
	Iunius	—	29. 70	—	29. 10	—	0. 60
	Iulius	—	29. 85	—	28. 98	—	0. 87
	Auguſt	—	29. 92	—	29. 10	—	0. 82
	Sept.	—	29. 92	—	29. 09	—	0. 83
	Octob.	—	30. 60	—	29. 22	—	1. 38

Nov.

Nov.	—	30. 13	—	28. 64	—	1. 49
Dec.	—	30. 40	—	28. 66	—	1. 74

§. 2. Apparet ex his altitudinibus barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 60, quae obſeruata fuit die 13. Octobris, tempore matutino, in perfecta ſerenitate, cum nebulis, et leni congelatione, ſpirante mediocri Euro. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737. obſeruata fuit 30. 95, non excedit: haec etiamnunc manet omnium hic loci obſeruatarum maxima. Minima barometri altitudo fuit hoc anno 28. 58, obſeruata die 28. Ianuarii, tempore matutino, cadente impetuoſa niue, et flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro, in frigore leniſſimo. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum barometricarum antea ſtabilitum, nimirum 2. 77; ſuntque etiam adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1743. Martii, 9. Lux borealis conſtans inferne, ſed ſuperne multis variantibus faculis ludens.

10. Lux borealis humilis et quieta.

Aprilis, 1. Lux borea, pluribus radiis ex oriente aſcendentibus illuſtris.

9. Lux borealis humilis, et paucis radiis emicans.

17. Lux borealis eleuata, inordinata, et debilis.

Auguſti 21. Lux borealis.

Nouemb. 2. Veſtigia lucis borealis inter nubes paullo diuiſas.

§. 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno d. 19. Septembris, eaque vniuerſalis, coelo nubilo. Maximum frigus huius anni incidit in diem 21. Decembris, quo in ſerenitate perfecta, mane, hora 9, thermometrum fahrenheit. deſcendit vsque ad gradus 8. infra 0, nullo flante vento. Frigus praeterea paullo minus acre experti ſumus, hoc anno diebus 28. Februarii, 5. 15. 17. 18. 19. 20. 22. 23. 27. 28. Decembris, qui omnes dies thermometrum modo dictum ad minimum in gradu 0. depreſſum tenuerunt. Maximus calor fuit d. 19. Iunii, oſtendente thermometro fahrenh. gradus 86. in loco vmbroſo.

§. 5. Tonitrua audita fuerunt hoc anno Aprilis 11. Maii 29. Iunii 7. 10. 14. 18. 19. 25. 29. Iulii 8. 26. Auguſti 7.

§. 6. Altitudines pluuiarum et niuium liquefactarum ex obſeruationibus Clar. *Richmanni* hoc anno fuerunt ſequentes, in pollicibus et partibus centeſimis pedis londinenſis.

1743.	Ianuarius - - - - -	1. 28.
	Februarius - - - - -	0. 74.
	Martius - - - - -	1. 49.
	Aprilis - - - - -	2. 18.
	Maius - - - - -	0. 74.
	Iunius - - - - -	3. 43.
	Iulius - - - - -	1. 85.
	Auguſtus - - - - -	2. 33.
	September - - - - -	1. 58.
	October - - - - -	0. 86.
	Nouember - - - - -	1. 88.
	December - - - - -	2. 27.
	Summa	20. 63.

§. 7. Ventos vehementes experti ſumus hoc anno diebus ſequentibus. Ianuarii 3. 4. 7. 8. 13. 28. 30. Februarii 2. 12. 15. 16. 24. Martii 6. 16. 18. 20. 29. Aprilis 4. 9. 15. 21. 26. Maii 3. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 25. Iulii 18. 26. Auguſti 26. 28. Septembris 4. 5. 11. 15. 16. Octobris 4. 25. Nouembris 1. 2. 3. 4. 8. 14. 16. 23. 28. Decembris 1. 11. 24. 25. Inter hos procellae ſurentes fuerunt diebus Ianuarii 4. 7. 8. 28. Februarii 15. Martii 20. Maii 3. 10. 19. Auguſti 26. 28. Nouembris 1. 2. Decembris 1. 24. Nebulae inſignes obortae ſunt Maii 25. 26. 27. Septembris 30. Octobris 13. 14. Nouembris 7. 8. 23. 24. Decembris 8. 20. 22. Primae denique hirundines viſae ſunt Maii 2.

§. 8.

§. 8. Halones circa Lunam conſpectae fuerunt Nouembris 16. Decembris 21. Irides apparuerunt Iunii 29, ſemihorii fere ſpatio, duplex, cum tertia valde debili, et ex vna tantum parte conſpicua. Iulii 26. Grandines mediocres ceciderunt Februarii 16. ſine vento, Iunii 29. flante mediocri vento. Cometes denique hoc anno apparuit, Viennae in Auſtria primum viſus d. 23. Decembris, cuius curſum obſeruatum Clariſſ. *Heinſius* in peculiari tractatu, germanice hic edito, deſcripſit.

DE DENSITATE METALLORVM SECVM PERMIXTORVM.

AVCTORE
G. W. Kraft.

§. 1.

Duo ſunt hydroſtatices problemata praecipua, quae et amoenitate, et ſingulari vtilitate, eminent; vnum *dati corporis cuiuscunque denſitatem comparare cum denſitate aquae, fluidiue alterius*; *alterum ex datis voluminibus et ponderibus ſimplicium duorum, aut pro lubitu plurium, in mixtum aliquod ingredientium, praedicere denſitatem mixti futuram*. Vtrumque duplici nititur fundamento; primo, *pondera, ſeu maſſas, duorum quorumuis corporum eſſe in ratione compoſita denſitatum atque voluminum*; altero, *corpus quodcunque ſolidum, immiſſum vaſi aqua penitus repleto, expellere tantundem aquae ex hoc vaſe, quantum voluminis ipſum occupat*.

§. 2. Hoc vtroque principio adiutus, dicitur *Archimedes*, cui tota haec theoria debetur, ſubtili ratione detexiſſe argenti per fraudem auro admiſti menſuram in corona votiua *Hieronis*, Syracuſanorum regis, quod primus teſtatur *Vitruuius*, lib. IX. cap. 3. addens, regem primo aduertiſſe fraudem *ex indicio facto*, quae verba *Perraltus*, in notis ad ſuam verſionem Gallicam *Vitruuii*, interpretatur per *lapidem lydium*. Sed inueniuntur plurimi auctores, *Marinus Ghetaldus*, in Archimede promoto, Prop. 1. *Galilaeus*; *Cabaeus*, *Ioh. Bapt. Hodierna*, in ſuo Archime-

chimede rediuiuo, et praecipue *P. Petit*, Burbonius, qui hanc praxin *Archimedis* in dubium vocarunt, immo negarunt; et hic vltimus quidem in libro anno 1634. edito, Pariſiis, cui titulus: *L'uſage, ou le moien, de pratiquer par une regle toutes les operations du compas de proportion*, &c. vtpote minus exactam, et diligentia tanti Geometrae indignam, ob inſuperabilem difficultatem colligendi accurate aquae ſic redundantis copiam; exiſtimaueritque *Archimedem* coronae in media aqua ſuſpenſae pondus examinaſſe, neglecta aqua ex huius immerſione effluente, aut altius aſcendente; in teſtimonium ſuae ſententiae adducens verſus *Rhemnii Fannii*, poëtae, qui ſeculo quarto clarùit, atque in Carmine, *de Ponderibus et Menſuris*, cap. 4. hoc *Archimedis* inuentum deſcribens, ait:

Argentique meri par pondus, idemque ſub vndis

Lancibus impoſitum, ſpecta.

§. 3. Cum igitur facile omnino credi poſſit, *Archimedem*, poſthabito altero horum principiorum, ſelegiſſe aliud atque in vſum vocaſſe, quod liber ipſius, *de inſidentibus humido*, ſuperſtes adhuc, abunde docet: ſubrogatur in huius locum tertium adhuc principium, hodie vſitatiſſimum, et, ob exactam ſui menſuram, priori multo praeferendum, nempe, *iacturas, quas corpora quaecunque ſolida, eidem fluido immerſa, patiuntur, tenere inter ſe rationem voluminum corporum immerſorum*. Quod et ex principio priori ſecundo facile deducitur, et experimentis inſuper, accurate inſtitutis, perfecte comprobatur. Cum igitur, proportionibus in aequationes mutatis, et poſitis corporis alicuius pondere in vacuo = P, volumine = V, denſitate = D, et iactura ponderis in aqua = A,

 ſit

ſit per princip. 1. $P = DV$; erit $\frac{P}{V} = D$; ſed quia per princip. III. eſt $V = A$, erit etiam $\frac{P}{A} = D$. Quae methodus denſitates corporum ſolidorum inueſtigandi, hodie recepta, et, vt videtur, poſt *Archimedem* recens introducta, tribuenda putatur *Hauksbeio*, vid. *Harriſii Lexicon Technicum*, vol. II. tit. Hydroſtatiks; qui nempe vir experientiſſimus commoda primus in hunc vſum inſtrumenta excogitauit, bilances ſcilicet, et reliquum apparatum, a celeberrimis *Graueſandio* et *Muſſchenbroekio* deſcriptum. Aliam vero viam ingreſſus eſt magnus ille ſcientiarum reſtaurator *Verulamius*, paratis ſibi cubo aureo, vnciam pendente, et vaſculo, cubum hunc exacte capiente; quod vaſculum deinde impleuit, aut aliis cubis diuerſorum corporum ſolidorum, aut infuſis fluidis, et pulueribus; hasque materias omnes, ita ſub vnum volumen reductas, bilance examinauit, ſicque tabulam denſitatum concinnauit in *Phaenomenorum vniuerſi* pag. 694. Patet enim facile ex modo dictis, ſi V fuerit conſtans, eſſe $D = P$. Sed ſimul etiam perſpectum eſt artificibus, quam difficulter parari poſſint et cubus, et vaſculum cubicum, quae omni huc neceſſaria exactitudine ad amuſſim ſint praedita; et quam anceps ſit impleri tale vaſculum fluido, ſic, vt datum ſemper contineat volumen.

§. 4. Ex his itaque principiis ſoluuntur omnia problemata huc ſpectantia; et alterum quidem ſuperius adductorum hunc in modum, quem, vt in ſubſequentibus exemplis nihil dubii ſuperſit, paullo diſtinctius exponam. Sint tria ſimplicia X, Y, Z, ingredientia mixtum aliquod M, et concipiatur ſimul aquae purae portio aliqua quaecunque; ponantur corporis denſioris X pondus $= P$, volu-

men

men $= V$, iactura ponderis, quam in aqua patitur, $= A$, denſitas $= D$; ſintque his reſpectiue analoga in corpore Y, minus denſo p, v, a, d, in corpore Z, adhuc minus denſo, $\pi, \Phi, \alpha, \delta$, et in aqua e, f, g, h; atque erit ex his mixti pondus $= P + p + \pi$, volumen $= V + v + \Phi$; iactura, quam in aqua patitur, ſit $= x$, denſitas $= y$. Igitur per princip. I. erit $P + p + \pi : e = (V + v + \Phi) y : hf$; ſed per princip. III. eſt $V + v + \Phi : f = x : g$; ergo erit $P + p + \pi : e = xy : gh$; aut $\frac{P+p+\pi}{x} : \frac{e}{g} = y : h$. (1.) Eſt vero etiam $V : V + v + \Phi = A : x$, per idem princip. III. hinc $x = \frac{AV + Av + A\Phi}{V}$, porro ex eodem principio ſunt $Av = aV$; $A\Phi = \alpha V$; hinc, ſubſtitutis his, prodit $x = A + a + \alpha$, quod ſubſtitutum in proportione (1) mutat eam in hanc ſequentem $\frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha} : \frac{e}{g} = y : h$; in hac aſſumitur denſitas aquae $h = 1$; et quoniam iactura aquae intra aquam poſitae omne ipſius pondus exhaurit, erit $g = e$, aut $\frac{e}{g} = 1$; ex quo fit $\frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha} : 1 = y : 1$, aut $y = \frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha}$ = denſitati corporis mixti. Sin igitur ingredientia tantum fuerint duo, erit denſitas mixti $\frac{P+p}{A+a}$; vel etiam, ſi denſitas aquae non aſſumatur pro vnitate, erit denſitas mixti ex tribus ingredientibus $= \frac{h(P+p+\pi)}{A+a+\alpha}$, ex duobus $= \frac{h(P+p)}{A+a}$.

§. 5. Sed inuerſum huius problematis ſolui nec in vnico quidem caſu poteſt. Sint enim duo ingredientia, quorum pondera X, Y, et volumina x, y, quaerantur ex datis mixti pondere M, et volumine m; erunt in hac quaeſtione quatuor incognitae X, Y, x, y, ſed non niſi

niſi duae aequationes quaeſtionis naturam exprimentes, nempe $X + Y = M$, et $x + y = m$; vnde patet, problema hoc eſſe indeterminatum; et multo magis tale, ſi quaeſtio inſtituatur de ingredientibus pluribus quam duobus. Sin autem adiiciatur noua aliqua conditio cognita, qualis ex. gr. ſit, natura ingredientium, hoc eſt, ipſorum denſitas, tunc problema in vnico tantum caſu fit determinatum, ſed in omnibus reliquis manet inſolubile Sint enim ingredientium ſex, pondera X, Y, Z, T, V, W; volumina reſpectiua x, y, z, t, v, w, naturae, vel denſitates, cognitae relatiuae a, b, c, d, e, f; mixti dati pondus M, volumen m; non poterunt ex his erui plures aequationes quam octo, cum incognitae adſint duodecim, quae aequationes ſunt,

$$X + Y + Z + T + V + W = M.$$

$$x + y + z + t + v + w = m.$$

$$\frac{X}{x} = a . \frac{Y}{y} = b . \frac{Z}{z} = c.$$

$$\frac{T}{t} = d . \frac{V}{v} = e . \frac{W}{w} = f.$$

Et leui quidem adhibita attentione patet in genere, ſi numerus incognitarum in tali problemate fuerit n, aequationum, ex natura quaeſtionis eruendarum, numerum fore $\frac{n+4}{2}$; vt igitur quaeſtio fiat determinata, ex Algebrae legibus debet eſſe $n = \frac{n+4}{2}$, hoc eſt, $n = 4$; quare hoc problema in eo ſolo caſu acquirit circumſtantias definitiuas, in quo adſunt quatuor incognitae, vel duo ingredientia, quorum cognita eſt natura; vtpote cui caſui inſeruiunt aequationes $X + Y = M$; $x + y = m$; $\frac{X}{x} = a$; $\frac{Y}{y} = b$; et quarum ope oriuntur valores ſequentes, $X = \frac{a(M - bm)}{a - b}$; $x = \frac{M - bm}{a - b}$; $Y = \frac{b(am - M)}{a - b}$; $y = \frac{am - M}{a - b}$. In omnibus

aliis

aliis caſibus vna, aut plures, nouae circumſtantiae praeſto eſſe debent, vt problema fiat determinatum; vti ex. gr. in caſu trium ingredientium, data eſſe inſuper poſſunt, aut pondus vnius ingredientis; aut volumen alterutrius; aut ratio duorum ponderum inter ſe. Vnde iure meritoque ſtatuit *Tacquetus*, in arithmeticae lib. IV. cap. 4. pag. 395: *ſi detur mixtum ex metallis tribus aut pluribus: nullo artificio deprehendi poterit*, *qua proportione ſint commixta*; *quod ea poſſint infinities variari*; ſubintellige autem artificio *hydroſtatico*, non *chymico*.

§. 6. Eſt tamen methodus aliqua, determinandi pondera et volumina trium ingredientium, ex cognitis pondere et volumine mixti, naturaque ingredientium, tam ſpecioſa, vt ea et mihi, et aliis perſpicacioribus, aliquamdiu illuſerit, et alios adhuc etiam in poſterum ſine dubio fallere poſſit, niſi fraus ipſius detegatur. Hanc, vti ab initio mihi in mentem venit, candide exponam. Statuam, eſſe mixtum aliquod ex metallis tribus, quae ſint I. II. III. Sit mixti pondus $= P$; atque ſint duo diuerſa fluida M et N, in quibus iactura ponderis huius mixti examinetur; et ſit quidem iactura haec in fluido $M = p$, in fluido $N = \pi$. Deinde metalli I. pondus P perdat in $M = a$, in $N = \alpha$; metalli II. pondus P perdat in $M = b$, in $N = \beta$; metalli III. pondus P perdat in $M = c$, in $N = \gamma$; atque inſit mixto metalli I. pondus $= x$; $II = y$; $III = z$; quoniam ergo ſunt iacturae ponderis, in eodem fluido, vti volumina ponderum; et volumina eiusdem ingredientis vti pondera: ſtatui poterunt aequationes ſequentes; in fluido M eſt pro metallo I, $P : a = x : \frac{ax}{P}$; pro metallo II. $P : b = y : \frac{by}{P}$; pro me-

tallo III. $P:c=z:\frac{cz}{P}$; ſunt ergo omnes hae tres iacturae ſimul ſumtae $\frac{ax+by+cz}{P}$ aequales iacturae mixti p; vnde prodit aequatio prima talis, $ax+by+cz=Pp$. In fluido autem N pariter eſt pro metallo I, $P:\alpha=x:\frac{\alpha x}{P}$; pro metallo II. $P:\beta=y:\frac{\beta y}{P}$; pro metallo III. $P:\gamma=z:\frac{\gamma z}{P}$; vnde eodem iure fiet aequatio ſecunda $\alpha x+\beta y+\gamma z=P\pi$; tertia autem aequatio ſua ſponte fluit, nempe $x+y+z=P$; igitur ex his tribus aequationibus tres incognitae poterunt determinari ex regulis algebrae, conſequenter eſt problema propoſitum determinatum. Sed manifeſtae fiunt hae offuciae, ſi perpendatur theorema *hydroſtaticum*, quo certum eſt, iacturas ponderis eiusdem maſſae, factas in diuerſis fluidis, eſſe in ratione denſitatum eorundem fluidorum. Sint ergo fluidorum M et N denſitates m et n; atque erit $a:\alpha=m:n$; $b:\beta=m:n$; $c:\gamma=m:n$; $p:\pi=m:n$; conſequenter erit $\alpha=\frac{na}{m}$; $\beta=\frac{nb}{m}$; $\gamma=\frac{nc}{m}$; $\pi=\frac{np}{m}$; qui valores ſubſtituti in aequatione $\alpha x+\beta y+\gamma z=P\pi$, reddunt primam ipſiſſimam $ax+by+cz=Pp$; ita vt duae hae aequationes, non re ipſa, ſed ſola ſimulatione alterius, appareant diuerſae; quare duae ſolum ſuperſunt aequationes reales, ex quibus adeo problema trium incognitarum manet indeterminatum.

§. 7. Supereſt alia adhuc conſideratio, quae iubere videtur vt et äeris, in quo corpora ponderamus, ratio habeatur, ſi denſitatem eorum, quantum licet, exactam obtinere velimus. Amittunt enim in äere quoque aliquid ſui ponderis corpora, quod facile ad calculum reuocari poteſt. Sit igitur corporis alicuius pondus abſolutum, quod

quod nempe habiturum eſſet in vacuo, $= P$; volumen $= V$; pondus in äere $= f$; denſitas äeris $= \alpha$; pondus in aqua $= g$, denſitas aquae $= 1$; atque erit iactura ponderis in äere $= \alpha V$, in aqua $= V$; et conſequenter $f = P - \alpha V$; $g = P - V$; ex quibus duabus aequationibus emitur $P = \frac{f - \alpha g}{1 - \alpha}$, et $V = \frac{f - g}{1 - \alpha}$; poſita autem denſitate aquae $= 1$, et iactura ponderis in aqua $= A$, eſt denſitas corporis $= \frac{P}{A}$, et hic eſt $A = V = \frac{f - g}{1 - \alpha}$; hinc correcta corporis cuiusnis denſitas erit $= \frac{f - \alpha g}{f - g} = \frac{f - \frac{1}{800} g}{y - g}$, quia denſitas aquae eſt ad denſitatem äeris $= 800 : 1$. Sed cum animaduertiſſem, differentiam denſitatum hinc oriundarum, in corporibus minutis qualia adhibuimus, vix eſſe ſenſibilem: hanc methodum non adhibui, ſed ordinariam ſecutus ſum, negligendo illud ponduſculum, quod in äere amittunt corpora.

§. 8. Cum itaque nobis liceat haec duo facile efficere, *praedicere quaenam denſitas oritura ſit ex datis quibusdam ingredientibus*; et deinde, *denſitam hanc ipſam, in mixto ortam, explorare ex regulis hydroſtaticis*; vt pateat, an praedictioni reſpondeat euentus, nec ne: hinc campus latiſſimus hic aperitur *theoriam* hanc cum *experientia* comparandi, praeſertim in metallis et ſemimetallis. Quem laborem, mihi quidem iucundiſſimum, cum ex parte aliqua in me recepi, feci id hortatu viri Perilluſtris, *Vincenti Raiſeri*, Auguſtae redituum metallicorum Vice-Praeſidis, ſcientiarum patroni, et rerum naturae ſagaciſſimi. Verſatus autem in ſolis metallis, illisque occupatus fui fere per totam aeſtatem anni 1742. Ingredientia mihi paraui tam pura ac licuit, eorumque, an-

tequam colliquefacta fuerint, pondera ſollicite examinaui in bilance exactiſſima tali, quam celeberrimus, dum viueret, *Graueſandius* deſcripſit in *Phyſices Elementis mathematicis*, pag. 201. Edit. 1725, vocauitque *bilancem hydroſtaticam*; et haec pondera expreſſi in granis eiusmodi, quorum 7680 faciunt libram amſtelodamenſem; vbi quidem mihi ſatis facile licuit etiam quadrantem talis grani in bilance annotare. Praeter caeteras circumſtantias, harum rerum peritis abunde notas, adhibui aquam, fluuialem quidem, ſed eam ſemper fere ad eundem gradum thermometri calentem, nempe ad 48 *fahrenheitianum*; quanqam hanc cautelam non adeo neceſſariam deprehendi, cum aucto ex induſtria aquae huius aliquando calore, vsque ad gradum 56, vix ſenſibilem ponderis mutationem obſeruaui in corpore intra talem aquam ſuſpenſo. Deinde, vt ne aëris bullae adhaereant corporibus ſubmerſis, quae multum nocere poſſunt vero ponderi inueniendo, ea quidem non calefeci, quod aliqui ſuadent, cum periculum exinde aucti voluminis exoriri poſſit; ſed ea intra aquam tamdiu celeriter hinc et inde agitaui, donec nihil amplius aëris contigui deprehendi poſſet. Fruſta ita praeparata tradidi poſtea Clariſſimo Dom. *Gellert*, Academiae Adiuncto, qui ſupellectile chymica ſua domeſtica effecit, ſingulari induſtria et diligentia, vt partes ſeparatae in vnam colliqueſcerent, et commiſcerentur. At vero mixta illa, quorum alterum ingrediens fuit ferrum, ideo non bene ſucceſſerunt, quod ferrum impurius, multo ſulphure ſcatens, adhibitum fuit; id quod Clariſſ. *Cramerus*, in ſua Docimaſtica, aliique, iam annotauerunt.

§. 9.

§. 9. Pondus fruſtuli aurei erat in aëre $208\frac{3}{4}$ gr. in aqua vero 197 gr. vnde eius denſitas 17, 766. Plumbi pondus erat in aëre $278\frac{1}{4}$ gr. in aqua $253\frac{3}{4}$, vnde eius denſitas 11, 357, Mixtura exinde orta erat fragilis, coloris fuſci, et plumbeo aliquantum nigrioris, ſed ponderis 478 gr. vnde decrementum ponderis paſſa fuit 9 gr. quam cum in duo tantum fruſta diſſecare voluiſſem, diſſiluit in plura, praecipue vero in duo reliquis maiora, quorum vnum pondus tenebat in aëre $200\frac{3}{4}$ gr. in aqua 186 gr. vnde mixti denſitas 13, 610; alterius pondus in aëre erat 102 gr. in aqua $94\frac{1}{2}$ gr. vnde huius denſitas 13, 600; ex quibus concludo mixturae denſitatem mediam 13, 605 per experimenta; praedicenda autem ea fuiſſet 13, 434; quare haec duo metalla ſecum permixta maiorem acquirunt denſitatem, quam regulae et theoria iubent.

Experim. I. ☉ et ♄

§. 10. Pondus fruſtuli aurei erat in aëre $189\frac{3}{4}$ gr. in aqua vero $179\frac{3}{4}$ gr. ſiue denſitas 18, 975; pondus autem fruſtuli argentei in aëre $273\frac{3}{4}$ gr. in aqua $247\frac{3}{4}$ gr. et denſitas 10, 528. Haec dederunt mixturam plane candidam, pro argento habendam, niſi pondus obſtitiſſet; huius pondus erat in aëre $460\frac{3}{4}$ gr. in aqua 425 gr. et denſitas 12, 888, quae per theoriam debuiſſet eſſe 12, 875, decrementum ponderis in mixto eſt $2\frac{3}{4}$ gr. Patet ergo, quantum ex his colligere licet, aurum et argentum intet ſe permixta denſitatem augere, ſed adeo parum; vt differentia negligi poſſit. Neque adeo *Archimedes* ſenſibiliter errare potuit, dum ex huius vtriusque metalli colliquefacti explorata denſitate concluſit ad vtriusque ingredientium pondera.

Exper. II. ☉ et ☽

Exper. III. ☉ et ♀

§. 11. Auri alia portio pondus habebat in aëre $131\frac{1}{2}$ gr. in aqua 124 gr. et denſitatem 17, 533. Cupri vero iaponici fruſtum tenebat pondus in aëre 281 gr. in aqua 249 gr. vnde denſitas eius 8, 781. Mixtura ex his facta coloris erat fere purpurei, et ponderis in aëre $409\frac{3}{4}$ gr. adeoque detrimentum ponderis ex fuſione ortum $2\frac{3}{4}$ gr. pondus in aqua erat 370 gr. adeoque denſitas 10, 308, quae per theoriam debuiſſet eſſe 10, 443; neque adeo haec mixtura denſitatem regulae aſſecuta eſt.

Exper. IV. ☉ et ♂

§. 12. Non ſine difficultate obtinuimus mixturam ex auro et ferro compoſitam, neque tamen eam ſatis aequabiliter permiſtam, quod color ferrugineus, in flauum ſenſim decreſcens, indicabat in mixti interioribus. Auri tamen pondus erat in aëre $94\frac{1}{4}$ gr. in aqua $89\frac{3}{4}$ gr. et hinc denſitas 20, 944. Ferrum tenebat pondus in aëre $676\frac{1}{2}$ gr. in aqua $589\frac{3}{4}$ gr. et hinc denſitatem 7, 798; huius accepi ſcobem ponderis 120 gr. quae cum auro permiſta maſſam dedit, cuius pondus in aëre 183 gr. vnde decrementum $41\frac{1}{4}$ gr. in aqua pondus ſeruabat adhuc $165\frac{1}{2}$ gr. hinc denſitas 10, 451, quae per regulas deberet eſſe 10, 802. Tenebatur hoc mixtum a magnete, vbicunque ipſi porrigebatur, ex omnibus lateribus.

Exper. V. ☉ et ♃

§. 13. Pondus fruſtuli aurei erat in äere 114. gr. in aqua 108, et denſitas 19, 000. Stanni pondus in äere fuit 249. gr. in aqua 215. gr. vnde denſitas 7, 323. Mixtum erat coloris plane argentei, ſine vllo indicio auri externo, et ponderis in äere 357. gr. in aqua 317. gr. ex quo oritur decrementum ponderis 6. gr. et denſitas 8, 925, quae ſecundum regulas deberet eſſe 9, 075.

§. 14.

§. 14. Pondus fruſtuli plumbei erat in äere 146. gr. in aqua 133½ gr. vnde denſitas 11,680; Argenti pondus in äere fuit 44½ gr. in aqua 40¼ gr. vnde denſitas huius 10,470. Mixtum exinde ortum erat coloris ferrei paullo albicantis, cuius pondus in äere 91½ gr. in aqua 83¾ gr. et conſequenter denſitas 11,806, quae ex regulis deberet eſſe 11,373; decrementum ponderis magnum eſt, plumbo ſine dubio adſcribendum, nempe 99. gr. Exper. VI. ♄ et ☾

§. 15. Pondus plumbi fuit in äere 1256. gr. in aqua 1144. gr. hinc denſitas 11,214. Cupri iaponici pondus fuit in äere 953. gr. in aqua 843. gr. vnde denſitas 8,663. Mixti pondus inueni in äere 1813. gr. in aqua 1630. gr. vnde denſitas 9,907, quae debuiſſet eſſe ſecundum regulas 9,950; decrementum ponderis fuit 396. gr. ſed quia ingredientia bis liquefacta fuerunt, vt melius commiſcerentur; ſumo huius decrementi dimidium, quod eſt 198. gr. Mixtura, parte ſui aliqua abraſa, viſa eſt ſubrutila. Plumbum et ferrum, quae nunc ordine ſuo ſequi deberent, ob difficilem horum metallorum permixtionem, non tentauimus. Exper. VII. ♄ et ♀ ♄ et ♂

§. 16. Pondus plumbi fuit in äere 1007. gr. in aqua 919. gr. vnde denſitas 11,443. Stanni autem in äere 701½ gr. in aqua 605½ gr. hinc denſitas 7,307. Mixtorum pondus erat in äere 1675¾ gr. in aqua 1494. gr. vnde denſitas mixti 9,220, quae ex regulis deberet eſſe 9,285; color mixturae videbatur albicans, fere vt argenti; decrementum ponderis eſt 32¾ gr. Conſentit hoc experimentum cum eo, quod inſtituit in Italia *Montanarius*, et relatum legitur in oratione celeberrimi *van Muſſchen-* Exper. VIII. ♄ et ♃

broek

broek praemiſſa experimentis Academiae del Cimento, ab ipſo latine editis, pag XXII.

Exper. IX. ☾ et ♀

§. 17. Pondus argenti erat in äere 528$\frac{3}{4}$ gr. in aqua 478. gr. hinc denſitas eius 10,418.. Cupri iaponici pondus in äere 340. gr. in aqua 301. gr. vnde denſitas 8,718. Mixtura exinde orta pondus tenuit in äere 858 gr. in aqua 770. gr. et conſequenter denſitatem 9;750, quae per regulam elicitur 9,679. Caeterum diſſecta haec maſſa, et limae ope paullo adaequata, coloris apparuit aurei. Decrementum ponderis eſt 10$\frac{3}{4}$. gr.

Exper. X. ☾ et ♂

§. 18. Argentum et ferrum commiſceri inter ſe non potuerunt, etiamſi bis experimentum tentatum, et ferrum in limaturam conuerſum fuit. Videbatur enim poſt fuſionem vtramque argentum modo quaſi agglutinatum ferro, termino valde diſtincto et tenui, ſic vt vnum compoſiti latus magneti adhaereret optime, alterum vero oppoſitum plane non.

Exper. XI. ☾ et ♃

§. 19. Argenti fruſtum pondus habebat in äere 315$\frac{1}{4}$ gr. in aqua 285$\frac{1}{2}$ gr. et hinc denſitatem 10,596. Stanni pondus in äere fuit 700$\frac{3}{4}$ gr. in aqua 605$\frac{1}{4}$, et hinc denſitas 7,338. Mixti pondus erat in äere 984. gr. in aqua 863. gr. vnde eruitur denſitas 8,132, quae regularum ductu deberet eſſe 8,111. Mixtura coloris erat magis ſtannei quam argentei, et ſub dentium morſu paullo adhuc ſtridens; decrementum ponderis eſt 32. gr.

Exper. XII. ♀ et ♂

§. 20. Cuprum et Ferrum non potuimus permiſcere, experimento bis repetito; nam magnes generoſiſſimus, ad indicium vocatus, vnum compoſiti latus attrahebat, alterum vero intactum relinquebat.

§. 21.

§. 21. Cupri ſuecici pondus in äere fuit $465\frac{1}{2}$. gr. in aqua 410. gr. et denſitas 8,387. Stanni vero pondus in äere $419\frac{1}{2}$ gr. in aqua $363\frac{3}{4}$ gr. vnde denſitas 7,457. Mixtum, bene vnitum, exinde factum, et cura ſumma praeparatum, praeſente et dirigente Perilluſtri Domino *Raiſero*, in laboratorio chymico collegii metallici, tenebat pondus in äere $863\frac{3}{4}$ gr. in aqua $762\frac{1}{2}$, et conſequenter denſitatem 8,530, quae ſecundum regulam debe-ret eſſe 7,919; vnde patet, decrementum ponderis fuiſſe 21. gr. et mixtum denſius fuiſſe ipſo cupro, ingredientium denſiore; adeoque hic denſitatem, quam experientia dedit, omnium maxime excedere denſitatem, quam regula exhibet. Atque idem hoc etiam aliis adhuc captis experimentis comprobatum nobis fuit. Hoc augmentum denſitatis in cupro et ſtanno, ſecum permiſtis, tam inſigniter conſpicuum, in cauſſa ſine dubio eſt, cur id ab aliquibus chymicorum excellentium ſingulariter fuerit annotatum, neglectum quamuis hucusque in libris *hydroſtaticis*, qui horum miſtorum examina ſibi vindicant, ſed in ſolo problemate *Archimedis* explicando et enarrando acquieſcunt. Ita legimus in *lexico technico Harriſii*, Tomo II. tit. Transmutatio: *Hookium*, Anglum, ex cupro et ſtanno ſecum permiſtis produxiſſe metallum cupro ſpecifice grauius, ita quidem, vt poſitis grauitate ſpecifica aquae = 1, cupri = $8\frac{1}{2}$, ſtanni = $7\frac{17}{30}$, eſſet mixti gravitas = $8\frac{3}{4}$, quae non male congruunt cum experimento noſtro Ibidem adiicitur quoque, plura talia experimenta de mixtione metallorum deſcripta eſſe in vita *Hookii*, ipſius *Operibus poſthumis* praemiſſa. Eiusdem huius phaenomeni meminerunt etiam *Becherus*, in tractatu germa-

Exper. XIII. ♀ et ♃

 nico,

nico, cui titulus: der Chymiſche Glücks-Hafen, edito anno 1682. pag. 109, ſed nimium extendere videtur hoc augmentum, dum duos globulos, cupreum et ſtanneum, vtrumque eiusdem voluminis, fuſione ad vnum praecedentium horum voluminum commixtos, ſummam vtriusque ponderis exaequare aſſerit; et Clariſſ. *Ioh. Iunckerus*, in *Conſpectu Chymiae*, pag. 958, vbi de hac re *Glauberum* allegat.

Exper. XIV. ♂ et ♃ §. 22. Ferrum et ſtannum inter ſe non fuerunt commiſta; erant enim latera extrema ita heterogenea, vt eorum alterum magnes teneret fortiſſime, alterum vero plane non attraheret; quam quidem heterogeneitatem ipſe etiam oculorum aſpectus edocuit.

Exper. XV. ♄ ♀ et ♃ §. 23. Commiſcuimus etiam metalla tria; atque erat in his pondus plumbi in äere 1470¾ gr. in aqua 1339½ gr. hinc denſitas 11,205. Cupri iaponici pondus in äere 604. gr. in aqua 534½ gr. vnde denſitas 8,690. Stanni pondus in äere 529. gr. in aqua 456¼ gr. cuius ergo denſitas 7,271. Maſſae huius bene permixtae totius pondus erat in äere 2143. gr. vnde decrementum 460¾ gr. Erat autem mixtum diuiſum in fruſta duo, quorum vnum accepi, et obſeruaui eius pondus in äere 1016. gr. in aqua 913. gr. vnde denſitas miſti fuit 9,864, quam regula praebet 9,520. Multum ergo ſuperat denſitas haec actualis illam, quae ſecundum regulam deberet locum habere.

§. 24. Euentus hucusque deſcriptos breuius exponam in ſequenti tabula:

Combi-

Combinationes metallorum.	Denſitates ingredientium.	Denſitates per regulam.	Denſitates per experiment.	Differentia	Decrementum ponderis.	Experimentum.
☉ et ♄	17.766 11.357	13.434	13.605	+0.171	9 gr.	I.
☉ et ☽	18.975 10.528	12.875	12.888	+0.013	2¾	II.
♄ et ☽	11.680 10.470	11.373	11.806	+0.433	99	VI.
☽ et ♀	10.418 8.718	9.679	9.750	+0.071	10¾	IX.
☽ et ♃	10.596 7.338	8.111	8.132	+0.021	32	XI.
♀ et ♃	8.387 7.457	7.919	8.530	+0.611	21	XIII.
☉ et ♀	17.533 8.781	10.443	10.308	−0.135	2¾	III.
☉ et ♂	20.544 7.798	10.802	10.451	−0.351	31¼	IV.
☉ et ♃	19.000 7.323	9.075	8.925	−0.150	6	V.
♄ et ♀	11.214 8.663	9.950	9.907	−0.043	198	VII.
♄ et ♃	11.443 7.307	9.285	9.220	−0.065	32¾	VIII.

ex qua generaliſſime apparet, 1. Ferrum videri poſſe reddere mixturam rariorem, quia id in ſola parte poſteriore tabulae occurrit; 2. Argentum reddere mixturas denſiores, quia id in ſola parte anteriore tabulae conſpicitur.

§. 25. Cauſſas harum ſeceſſionum a regula indicata admodum difficiles eſſe credo, cum requirant cognitionem metallorum intimam, et talem, qualem de ferro expoſuit ſagaciſſimus *Reaumurius*, qua deinde feliciter vſus eſt in explicando problemate *kempiano*, de ſcintillarum ſubito ortu, quae chalybi, ſilicis ope, excudantur; in *Commentariis Academiae ſcientiarum regiae pariſienſis*, ad annum 1736. Id tamen agam, vt aliquot cauſſas excludam, de quibus facilis ſuſpicio oriri poſſet, euentum hunc ipſis eſſe adſcribendum.

§. 26. Experti ſumus, mixtum ſemper minoris fuiſſe ponderis, quam quod tenebat ſumma vtriusque ingredientium; et aurum quidem, cum argento miſtum, quam minimum detrimenti huius dediſſe, ſimulque etiam quam minimum a denſitate regulari deuiaſſe. Conſtat deinde etiam experimentis certiſſimis, et multa cura inſtitutis, metalla, in fuſione aliquamdiu ſeruata, ſtannum praecipue, cuprum, et plumbum, ponderis augmentum acquirere ſenſibile. Non itaque ſine ratione in opinionem adducimur, ex ſolo ingredientium orto incremento vel decremento ponderis omnes effectus hucusque enumeratos explicari poſſe Quam ſententiam vt examinare queam, pono metallorum ingredientium pondus, volumen, et denſitatem, denſioris quidem P, V, D, rarioris p, v, d, decrementa ponderum in denſiore m, in rariore n. Facta igitur commixtione, erit in compoſito metalli pondus denſioris $= P - m$; rarioris $= p - n$; quorum illud ſibi expoſcit volumen $V - \frac{mV}{P}$; hoc vero $v - \frac{nv}{p}$; ex his deducitur denſitas mixti $= \frac{P + p - m - n}{V + v - \frac{mV}{P} - \frac{nv}{p}}$.

Sit igitur denſitas mixti actualis obſeruata $= a$, detrimentum ponderis in mixto, etiam obſeruatum, $= b$; habebuntur hae duae aequationes, $\frac{P + p - m - n}{V + v - \frac{mV}{P} - \frac{nv}{p}} = a$, et $m + n = b$. Ex quibus elicitur valor ipſius $m = \frac{P + p - b - aV - av + \frac{abv}{p}}{\frac{av}{p} - \frac{aV}{P}}$; eſt autem $P = DV$; $p = dv$; $\frac{v}{p} = \frac{1}{d}$; $\frac{V}{P} = \frac{1}{D}$; ergo elicitur ex factis ſubſtitutionibus his valor ipſius $m = \frac{(D - a)DVd + (a - d)(bD - Ddv)}{a(D - d)}$; ſubſtituantur

antur hic rurſus valores ipſorum DV et dv, qui ſunt P et p; atque obtinebitur ſic $m = \frac{(D-a)Pd-(a-d)(p-b)D}{a(D-d)}$. Applicando nunc hanc expreſſionem ad experim. XI. de ☽ et ♃ fit $D = 10.596$, $a = 8.132$; $P = 315\frac{1}{4}$; $d = 7.338$; $p = 700\frac{3}{4}$; $b = 32$; atque ex his deducitur quamproxime $m = 3.07$ gr. $n = 28.93$. gr. Sin itaque in hoc caſu ſtatuatur argentum paſſum fuiſſe decrementum 3.07. gr. et ſtannum 28.93. gr. explicari poterit et denſitas mixti aucta, et detrimentum ponderis in eo factum, per hypotheſin hanc ſatis probabilem. Sed applicando eandem hanc formulam ad caſum experimenti XIII. de ♀ et ♃; oriuntur $m = -473$. gr. $n = 494$. gr. quod detrimentum ponderis negatiuum in cupro indicat, ipſi augmentum acceſſiſſe ponderis 473. gr. ſtannum vero paſſum fuiſſe detrimentum 494. gr. Cum itaque ſtanni ingredientis pondus tantum fuit $419\frac{1}{2}$. gr. debuiſſet in mixto adſuiſſe pondus ſtanni $-74\frac{1}{2}$. gr. quod abſurdum eſt; vt praeteream, augmentum cupri ex $465\frac{1}{2}$. gr. ad $938\frac{1}{2}$. gr. eſſe incredibile. Quoniam igitur haec explicatio vni ſoli phaenomeno manifeſtiſſime contrariatur: nulli recte explicando ſufficiet.

§. 27. Altera ratio, quae in ſubſidium vocari poſſe videtur, haec eſt: metalli denſioris aliquid ſubintrare, durante fuſione, poros metalli rarioris, ita tamen, vt exinde huius volumen non augeatur, ſed accepta ponduſcula libere, et ſine facta extenſione ſui, intra ſe contineat. Sint igitur denuo eaedem denominationes, quae ante; atque inſuper illa portio metalli denſioris, quae rarioris poros ingreſſa eſt, ſit $= \alpha$; erit igitur iam mixtum compoſitum ex metallo denſiori, cuius pondus $= P - \alpha$ volumen

XIII. ſi numeris rotundis aſſumantur data $P = 465$ gr, $D = 8\frac{2}{3}$, $p = 419$ gr. $d = 7\frac{2}{3}$; $b = 21$ gr. $a = 8\frac{1}{2}$; et ſtatuantur $\alpha = 05$ gr. $\Phi = \frac{1}{2}$, ita vt ſit $\Phi : v = \frac{1}{2} : \frac{p}{d} = d : 2 \cdot p = 7\frac{2}{3} : 838 = 1 : 114$, aut vero $\Phi = \frac{1}{114} v$; prodibit $m = 1$ gr. quae omnia ſatis commode aſſumi poſſunt; vnde haec explicatio latius adhuc patet quam praecedens.

QVA

QVA RATIONE INSTRVMENTVM, QVO QVANTITAS AQVAE, CALORE ATMOSPHAERAE NATVRALI EX SVPERFICIE AQVAE CERTA IN AEREM ELEVATAE, COMMODE MENSVRATVR, CONSTRVI DEBEAT.

AVCTORE
G. W. Richmann.

I.

Fiat vas ligneum cylindricum robuſtis annulis ferreis compaginatum, cuius ſectio verticalis ſit C A O B D, vel inſtar doliorum in medio in ventrem abiens. Vas quidem cuiusuis figurae etiam quadrangularis eligi poteſt, figura tamen cylindrica vel quomodocunque rotunda ligneis praeſertim vaſis magis conuenit. Vaſa einim talia durabiliora eſſe, quadrangularium vero compagem facile ſolvi, vſu compertum eſt. Tab. III. Fig. 2.

2. Diameter cauitatis vaſis A B ſit 20 digitorum, plus vel minus et altitudo A C cauitatis quinque circiter digitorum plus vel minus.

3. Interna et externa vaſis ſuperficies pice bene obducatur, inſtar doliorum quibus cereuiſia aſſeruatur, talique ratione contra aëris iniurias defendatur. Poteſt etiam interna ſuperficies plumbeis laminis loco picis obduci.

4. Vas circa baſin pertuſum et Epiſtomio C praeditum ſit, vt aquae, ſi requiratur, exitus concedi poſſit.

5. Operculum A O B conſtruatur, quod in medio ſit eleuatum ita, vt pluuia commode defluere poſſit, et im-

ponatur vaſi. In *q* perforetur, vt aëri liber aditus et exitus per foramen pateat.

6. In medio operculi A O B ſit foramen quadrangulare, quod canalem plumbeum quadrangularem O P S R cuius lumen 25 digitorum quadratorum ſit et altitudo quinque digitorum ferme, recipiat. Canalis huius extremitas vna O R habeat marginem, ne foramini quadrangulari operculi immiſſus, cadat, ſed operculo bene fulciatur, altera extremitas tantum non attingat fundum vaſis.

Vt pateat, deſcriptum inſtrumentum vſui deſiderato accommodatum eſſe.

1.) Exponatur aëri aperto in fulcimento quodam.

2.) Fac infundatur quantitas aquae prius menſurata per lumen canalis quadrangularis, ſic vt circa mediam vaſis altitudinem ſtagnet.

3.) Stet per menſem vnum expoſitum ita aëri vt dictum et vltimo menſis die aqua in vaſe remanens menſuretur.

Cum ne ſicciſſimo quidem menſe ex ſuperficie 25 digit. quadrat. vnquam 300 dig. cub. aquae in vapores reſoluantur, vt ex obſeruationibus variis conſtitit, et ſumma aquae in vaſe contentae ferme 800 digit. cub. ſit, quantitas haec aquae menſis vnius interuallo vt in vapores abeat, non eſt metuendum, ſi vel ne gutta quidem pluuiae toto iſto temporis interuallo, aquam inſtrumento contentam augeret. At auget pluuia quantitatem huius aquae, pluuiaeque quantitas vaſe hyetometrico determinatur, data ſuperficie, in quam pluuia cadit. Haec tamen quantitas ſi toto menſis ſpatio nihil exhalaret, nunquam tanta eſſe poteſt, vt oras vaſis attingens defluere valeat; per varias enim obſeruationes conſtitit, nunquam vnius menſis interuallo

vallo 300 digitos cubicos pluuiae in ſuperficiem 25 dig. quadratorum cecidiſſe, quae, ſi omnis in vaſe ſtagnaret, ne vnius quidem digiti altitudinem obtineret. Hinc ſimul patet altitudinem capacitatis vaſis duorum tantum digitorum eſſe poſſe. Aſt ne fabro lignario negotium faceſſat, maior altitudo vaſi tribui poteſt.

Cum igitur aquam initio menſis infuſam menſurare poſſimus, antequam infundimus, et pluuiae quantitatem per vas hyetom: determinare; facili negotio quantitas aquae exhalatae innoteſcit, ſi a ſumma ex quantitate pluuiae, per vas hyetom: determinatae et aquae initio menſis infuſae, aquae quantitas, quae ſub finem menſis in vaſe remanet, ſubtrahatur. Differentia enim inter iſtam ſummam et aquam in fine menſis reſiduam erit quantitas aquae euaporatae ex ſuperficie 25 degit. quadrat. quae erat determinanda.

Facile patet ſi tali inſtrumento ad inquirendam euaporationis aquae quantitatem, vtimur, non neceſſe eſſe, vt quotidie noua aqua infundatur, hinc commodum eſſe inſtrumentum.

DE VERA SIGNIFICATIONE PROCESSVVM MAMILLARIVM CEREBRI.

AVCTORE
Ioſia Weitbrecht.

§. 1.

Quamuis nemo negauerit, ad diſtinctam rerum cognitionem, et euitandam idearum confuſionem plurimum conferre, vt res quaelibet proprio nomine ſuo deſignetur; tumque, perinde eſſe, qualecunque nomen fuerit, dummodo, quid per illud intelligi debeat, ſtricte definiatur: tamen ſimul cauendum eſt, ne nomina ſint incongrua aut falſa; quia ſaepe accidere poteſt, vt iſtiusmodi falſae denominationes falſam quoque rei ipſius ideam animis ingenerent. Sufficiat nunc ex pluribus huius peccati exemplis, qua Anatomia nobis ſuppeditat, allegare Proceſſus mamillares cerebri; per quod nomen quid veteres intellexerint, et quatenus illud neruis odoratus in homine competat, partim ex hiſtoriae anatomicae fontibus, partim ex ipſa naturae contemplatione diſtincte explicare conabor.

§. 2. In aprico eſt, proceſſuum cerebri mamillarium denominationem originem ſuam brutorum ſectioni debere, cui certae quaedam cerebri extuberantes appendices occaſionem dederant. Galenus * eas ita deſcribit: „Cerebrum „germina (αποφυσεις) duo ad haec ipſa loca (*nares*) „ſpectantia habet, eaque oblonga et concaua, quae ex „anterioribus cerebri ventriculis ortum habent, et ad eam „caluariae partem, vnde naſus oritur deſcendunt, quo loco oſſa

* Libr. de inſtrumento odoratus.

„oſſa colatoria poſita ſunt„. Qua quidem deſcriptione, vtut incompleta, ſiquidem illa cum vitulorum ouiumque cerebris conferatur, nihil verius dici poteſt. In his enim brutis omnino tales diſtincti proceſſus (ita enim veteres anatomici latini apophyſes graecorum nominare amant) a lobis cerebri anterioribus diuerſi, ab anterioribus ventriculis oborti, in baſi cerebri decumbentes deprehenduntur.

§. 3. Quis vero hos proceſſus primum mamillares et papillares appellauerit, non aeque conſtat. Probabile eſt autem, temporibus Veſalii demum hoc nomen inualuiſſe, cum ne Guntherus * quidem Andernacenſis, Veſalii Praeceptor illius meminerit, Veſalius autem iam ad conſuetudinem * prouocet. Quisquis autem huius denominationis auctor fuerit; concedendum eſt, illam omnino cum proceſſuum figura ſatis apte congruere; quippe in vitulis craſſitudinem digiti indicis aequantes, vaccarum iuniorum papillis, queis Veſalio * placet aequiparare, perquam ſimiles ſunt.

* In Inſtitut. Anatom.

* C. H. Fabr. L. IV. c. 3.

* in Examine obſerv. Fallop.

§. 4. Origo, directio et terminus horum proceſſuum effecere, vt veteres illos pro olfactus organo habuerint, et praeterea cerebri pituitam per eosdem expurgari crediderint; qua methodo autem vtrumque hoc officium praeſtarent, ex ſyſtemate Ariſtotelico quod Galenus adſciuerat, vti in eius Libro VIII. de vſu partium ampliter legi poteſt, explicare conati ſunt. Fauebat huic opinioni interna cauitas, quae cum ventriculis ipſis per meatus ſingulares, quos Veſalius in Examine obſeruationum Fallopianarum deſcribit, manifeſto communicant. Quae cauitas et communio vti negari nequit, ita illi expurgationi obſtat, quod illa cauitas in ipſas nares non pateat; neque etiam

proceſſus ipſi eo habitu, quo hactenus accepti ſunt, vera olfactus organa dici queunt, vti infra (§. 9. 10.) videbitur.

§. 5. Singularis autem forma, qua hi proceſſus gaudent, impediuit, quo minus inter ipſos neruos referrentur. Hae enim cerebri productiones, praeterquam quod craſſitie ſua neruos ipſos longe antecedant, etiam toto habitu a neruis differunt, quippe vti ipſa cerebri ſubſtantia, ex medulla, et cortice, imo et ipſis leuibus anfractibus componuntur, et veras cerebri excreſcentias eſſe commonſtrant; cum contra nerui ſub ſpecie funiculorum medullarium albicantium apparere ſoleant.

§. 6. Quemadmodum vero multa ex brutorum deſcriptionibus in corporis humani hiſtoriam translata ſunt, quae tamen vel hic non reperiuntur, vel ſaltim nonniſi improprie iisdem nominibus inſigniri queunt: ex. gr. rete mirabile, paniculus carnoſus, inteſtinum duodenum, tunica allantoides: ita etiam cum iſtis cerebri apophyſibus accidit. Nam poſtquam ſemel proceſſuum mamillarium vel papillarium appellatio in ſermonem Anatomicum recepta eſſet, tales autem productiones brutorum ſimiles in homine non inuenirentur, nec a Galeni opinionibus diſcedere facile eſſet: multae inde varietates ac diſſenſiones, immo confuſiones, quarum iam Veſalius * ſuo tempore meminit, inter diſſectionum profeſſores obortae ſunt.

* C. H. Fabr. L. IV. c. 3.

§. 7. Alii enim, cum formam iſtam olfactoriis neruis in homine neutiquam competere viderent; ne nomen abiicerent, verum organon potius deſeruerunt, et anteriora illa cerebri tubercula retuſa, quae ſuper oculorum orbitis prominent, mamillares proceſſus vocarunt, et pro olfactus organo habuerunt. Hanc poſtremam opinionem

Veſalius

Veſalius quidem * exploſit, ſed appellationem tamen in figurae ſuae * explicatione retinuit, quem T. Platerus † ſequutus eſt. C. Bauhinus autem, qui easdem figuras Platerianas vel potius Veſalianas forma minori ſed nitidiori deſcripſit et imitatus eſt, alicubi illam correxit, et expreſſis verbis proceſſus *non mamillares* * vocauit. Alii autem, agnito licet vero olfactus organo in homine, nihilominus tamen et appellationem proceſſuum mamillarium retinuerunt, et praeterea ipſam deſcriptionem, quae ſolis brutis competit, obtorto quaſi collo ad humanos neruos applicare, et inprimis meatum cauum ex ventriculo cerebri ad os ethmoides pertingentem illis tribuere voluerunt; inter quos primas tenet G. Fallopius, quem, etſi propterea merito a Veſalio * caſtigatum, plurima tamen ſuperioris ſeculi ſcriptorum turba ſequuta eſt, ne Williſio quidem excepto, qui deſcriptione ſua * ex vitulis et ouibus maximam partem deſumta, etiam alios ex. gr. Th. Bartholinum * ſeduxit, vt neruos olfactorios manifeſte cauos in homine ſtatueret. Immo quamuis Fallopius † confiteatur, in homine horum ductuum cognitionem ſatis difficilem eſſe, dum ita anguſti ſint, vt niſi in recentiſſimo integerrimo cerebro tractentur, numquam patere poſſint: tamen Isbr. Diemerbroeck * ad eam vsque dexteritatem dixerim an audaciam? proceſſit, vt illos, etſi admodum anguſtos, ſtylum ferreum communem ac tenuiorem recipere, ſeque cauitatem illam saepius ſtudioſis demonſtraſſe aſſerat. Quae aſſertio autem hodie aſſenſum non * inuenit; quamuis recentioribus temporibus de Slevogtio, Ienenſi, et de ſe ipſo glorietur diſcipulus eius Andreae, * ſe cauitatem horum neruorum in homine per

* l. c.
* L. IV. c. I. fig. 2. lit. C.
† T. XXXIV fig. 2. lit. C.
* Tab. IX. fig. I. lit. C
* in Exam. obſ. Fallop.
* Anat. cerebri C. I. et XXI.
* Anat. renov. L. III. c. II.
† in Obſerv. anatom.
* Anat. L. III c. VIII. vid. et monſtroſiſſima figura in Blancardi anatomia reformata Tab. XIV. fig. I.
* Vieuſſens Nevrogr. L. III. c. II.
* Diſſert. de proceſſibus Lugd. Bat. 1715.

per ſiphonem inflando manifeſtaſſe. Porro alii olfactus organa, vti in homine ſunt, et agnouerunt, et ſatis diligenter deſcripſerunt: tamen, quia ex ipſorum opinione caluariam non excederent, inter neruorum ſeriem referre non auſi ſunt, vt Veſalius, Columbus; quod tamen iam ante illorum tempora Theophilus Protoſpatarius, * neglecto proceſſuum nomine, fecerat. Alii denique non totum neruum, ſed tantummodo extremitatem eius tumidulam, primum a Columbo indicatam proceſſus mamillaris et papillaris nomine inſignire maluerunt, vt Veslingius, * Bartholinus, Williſius.

* de H. C. fabrica L. IV. c. 12.

* Syntagm. Anat. c. XIV.

§. 8. Ex his diſſenſionibus vt emergamus: liceat mentem noſtram paullo diſtinctius exponere. Proceſſus Galeni, quando cranio ablato aſpectantur, in brutis ſunt verae productiones ipſius cerebri, in huius baſi anteriori caluariae incumbentes, a loborum anteriorum apicibus retuſis diſtinctae, et vltra hos ad os cribriforme vsque exporrectae, in vitulis et ovibus craſſitudinem digiti indicis aequantes, ſubſtantia medullari et corticali anfractuoſa praeditae, intus cavae, cum ventriculis ſui lateris ſingulae communicantes, ſed nares verſus occluſae et coecae, et vbi a loborum apicibus, elatiore loco poſitis, recedunt, per piam matrem in circulum fortiter revinctae. In averſa autem facie, ſublata caluariae baſi nulla talis apophyſis a cerebro interſtincta cernitur. Sed ex ſulco transuerſo, qui lobum cerebri medium et anteriorem vtrinque diuidit, baſis cerebri paullum emergens in corpus quoddam pyramidale efformatur, quod primo magis compreſſum mox vero ſubturgidum anteriora verſus progreditur, et paullatim anguſtius redditum, abſque vlla ſuperficiei aequabilis diſtin-

diſtinctione terminatur, non in apophyſin quandam mamillarem vti in latere auerſo, ſed potius in obtuſam quendam et craſſum apicem, qui dum in oſſis ethmoidis cavitatem ſe inſinuat, ob huius marginem recuruum, ſimiliter adunca quadam curuitate ad latus externum flectitur. Hoc corpus quod non inepte pro radice proceſſus mamillaris haberi poteſt, etiamſi in exteriori latere per leuem ſulcum a lobo anteriore ceu ſingularis maſſa diſtinguatur, re ipſa tamen non niſi lobi anterioris baſis, extremitas autem eius vera totius cerebri ſubſtantiae excreſcentia eſt.

§. 9. Et hi quidem proceſſus omni iure mamillares, ob rationem ſupra (§. 3.) ex Veſalio allatam dici queunt. At vero qui cum Galeno hanc proceſſuum maſſam pro organo olfactus ſolo et immediato inter nares et cerebrum neruorum inſtar communicante habet; ille ni me omnia fallunt, a veritate aberrat.

§. 10. Nam in iſta (§. 8.) cerebri baſi, in corporum praedictorum pyramidalium ſuperficie fere media veri nerui olfactorii ſub habitu faſciolae medullaris, albae, lineam circiter geometricam latae, non turgidae ſed planae, compreſſae, molliſſimi excurrunt, ex pluribus radiculis medullaribus, quae e corporibus ſtriatis emergunt, et in illo ſulco transuerſali quo lobum anteriorem et medium diuidi dixeram, directione oppoſita concurrunt, apparenter coaleſcentes; qui cum ad eum circiter locum peruenerunt, vbi proceſſus in auerſo latere a lobis cerebri diſcedunt, in illorum ſubſtantia corticali tuberoſa immiſcentur, ac ſepeliuntur. Sunt igitur etiam in brutis nerui ſingulares olfactorii, a proceſſibus Galeni, et neruis Diemerbroekianis diſtincti, quos, cum nec a veteribus, nec e recen-

tiorum

tiorum quopiam obſeruati, vel ſaltim indicati ſint, figura exprimere tentauimus.

§. 11. Contra vero *in homine* tales cerebri productiones non dantur, quae proceſſuum mamillarium nomen ſimili modo mererentur. Nam illi anfractuum reuolutionumque apices, queis anteriores cerebri lobi ſuper oculorum orbitis terminantur, etſi quodammodo protuberent, tamen proceſſus aut apophyſes dici nequeant, quippe illorum figura a cranii cancellis, et durae matris productionibus vnice dependet, neque locus aſſignari poteſt, quo ex cerebro excreſcant; ne dicam praeter iſtas productiones, etiam haec ipſa cerebri tubera anteriora in brutis adeſſe. Multo minus pro olfactus organo haberi queunt, dum cum naribus neutiquam communicent, et oſſi cribriformi abſque vlla cohaeſione nude incumbant.

§. 12. Vera autem olfactus organa, intra cranium hominis, ſunt funiculi molles, colore, formaque tenui, et prolongata, omnino neruis reliquis maximam partem reſpondentes, hinc inter ipſos neruos merito relati, medullares, albi, vix lineolam geometricam lati, plani tamen, et latiores quam profundiores. Quorum origines, progreſſus, termini, nexus et habitus, quamnis a Veſalio * Vieuſſenio, † et Winslowio †† adeo diligenter expoſiti ſint, vt lectorem illac ablegare, et vlteriori deſcriptione ſuperſedere queam: non poſſum tamen, quin duo admoneam.

§. 13. Primum: hos neruos non ita paullatim et ſenſim, vti Williſius, * Blancardus, † Winslowius, †† inquiunt, et Veslingius, * atque ex eo Bartholinus, † item Williſius, * Vieuſſenius † figuris ſuis exprimunt, in ma-

forem

Tab. V. fig. 1

* C. H. F. L. IV c. 3.
† Nevrograp. L. III. c. II.
†† Ex. anat. Traité de la tête. v. 132. 133.
* l. c. C. XXI
† Anat. ref. c. XI.
†† l. c.
* C. XIV T. III. fig. 3.
† L. III. c. II. T. I.
* Cap. 1. f. 1.
† L. I. Tab. IV. V.

iorem molem et craſſitudinem excreſcere, ſed vbi primum ex ſuis fibris medullaribus coaluerunt, toto itinere eandem ferme latitudinem ſeruare; tum vero, vbi oſſi cribroſo ad latera criſtae galli incumbunt, mox in extremitatem illam turgidulam oualem et bulboſam (Fig. III.) intumeſcere; quas extremitates ſi quis (§. 7.) papillares aut mamillares dicere velit, me quidem facile aſſentientem habebit, dummodo res non ita accipiatur, ac ſi totus neruus iſtiusmodi figura gaudeat.

§. 14. Alterum neruos hos non adeo perfecte medullares eſſe, quin vnus et alter tractus cinereus in media longitudine transpareat, et extremum tuber ipſum faciem magis corticalem, et ſubcineream, fere glandulae pinealis in modum, prae ſe ferat.

§. 15. Haec extremitas autem tumida, oualis (§. 12.) et ſubcinerea (§. 13.) non niſi in cadaueribus recentiſſimis facile detegitur. Quin enim ſingulari piae membranae tunica obuoluitur, quae vna cum neruulis in oſſis cribriformis foramina deſcendit: hinc illius membranae vaſculis irretita, et accedente leniſſima putredine diffluens, etiam minima vi in eleuando cerebro adhibita, a reliquo neruo abrumpitur.

§. 16. Si quaeras, quem igitur vſum iſti proceſſus in brutis praeſtent, et quare illis ſola bruta gaudeant, homo autem deſtituatur, haec ratio mihi valde probabilis videtur. Suppono ſubſtantiam neruorum olfactilium adeo mollem et teneram eſſe, vt abſque ſuſtentaculo in longitudinem protendi nequeant. Atqui os frontis in homine iuxta criſtam galli vtrinque in laquearis formam elatum, propter oculorum orbitas, vltra oſſis ethmoidis laminam

 perfo-

perforatam, quae ad laqueatis baſin in medio complendam concurrit, prominet; vnde euenit, vt loborum cerebri apices quoque ſuper hac baſi in anteriori exporrecti, ipſum os cribriforme obtegant. Nerui igitur molles ad haec loca pertingentes in his cerebri lobis anterioribus commodam ſedem nacti ſunt, in qua molliter quieſcerent, et tenuis membranae interuentu ab omni rupturae metu tuti et foti colligerentur; ſi quidem et propter neruorum bulbos ouales ſingularis foueola inter anfractus cerebri vtrinque exſculpta eſt. At vero in brutis alia eſt cranii conformatio. Nam orbitae oculorum non priori caluariae loco, ſed lateraliter poſitae ſunt, et quidem paullo altius et poſterius quam os ethmoides. Neque oſſa cribroſa in baſi caluariae horizontalem ſitum habent, ſed ad latera interſepti medii oſſis frontis anguſta cauitas oſſea nares verſus producitur, cuius fundum reſpectu baſeos caluariae perpendiculare foraminibus pertunditur, quibus ex altero narium latere canaliculi cartilaginei arcuati, pectinatim in orbem diſpoſiti reſpondent. Hinc anterior frontis oſſium ſedes principio non in altum eminet, ſed propter inſignes ſinus lamina cranii interior valde depreſſa, poſt quam ad formandam dictam cauitatem concurrit, tum demum paullatim aſſurgit, et turgentibus cerebri haemiſphaeriis locum concedit. Propter hanc igitur ſingularem oſſium conformationem non tota cerebri anterioris maſſa ad nares vsque pertingit, ſed ad marginem cauitatis illius ſuperiorem, recuruis apicibus ſubſiſtit, et illa portio aliqua ſub habitu breuium proceſſuum exporrecta, cauitatem iſtam adimplet, quae mollem et medullarem neruum olfactilem ob amplitudinem oſſis cribroſi in minutiſſima fila diſperſum ſubſtan-

tia

tia corticali amplecteretur, inuolueret, et tuto ad cribri foramina deferret.

Explicatio figurarum.

Figura prima monſtrat proceſſus mamillares vituli cranio ablato ſpectatos. Tab. IV. fig. 1.

Figura ſecunda exhibet eosdem proceſſus, eorumque radices in baſi cerebri ſpectatos. Tab. V. fig. 2.

Figura tertia neuos olfactiles ex homine ſiſtit. Tab. V. fig. 3.

DE TINCTVRIS METALLORVM.

AVCTORE
Michaele Lomonoſow.

§. 1.

Quam varia, eaque admiranda corpora in penetralibus terrae natura progenerat, iis abunde conſtat, quibus ſplendidiora Minerophylacia aliquando perluſtrare fuit volupe, vel quos tenebroſas et ſquallidas fodinas perreptare non diſtaeduit. Quaedam enim diuerſis iisque elegantibus coloribus ludunt atque ſuperbiunt; nec raro precioſius aliquid mentiendo minerologiae ignaris imponunt. Nonnulla autem ſordido velamine adoperta ſunt, et vilius quicquam repraeſentando, imperitorum oculos eludunt. Ita nobilium metallorum facies plerumque obſuſcatur, fucatur ſaepe ignobilium. Denique plurima eorum figuras praeſeferunt, quae alias telluris ſuperficiem, vel aera, aut aquas incolunt; eaque tum vera animalia aut vegetabilia ſunt, et longiſſimo aeuo petream duritiem induêre; tum mera mineralia ſunt, et ludentis naturae induſtria eorum figuram ſibi adſciuerunt.

§. 2. Nec metallorum, quae iam defaecata in vſum adhibemus, ſine pari admiratione poſſumus indolem contemplari, quod tam duro corpori tenax tractabilisque inſit ductilitas, quodque caecos montium receſſus tam fulgida et luce dieque digniſſima corpora occupent. Atque iſtae quidem ſunt, qualitates, quae metalla a reliquis corporibus optime diſtinguunt, vt ea per corpora fulgida et ductilia congrue definiri poſſint.

§. 3.

§. 3. Memoratae qualitates, quae ſpecificam differentiam metallorum ab aliis corporibus conſtituunt, quibusdam eorum firmius inhaerent, quam reliquis. Nimirum quaedam actione ignis incineres et vitrum non adeo difficile rediguntur, fulgore et ductilitate amiſſis; alia vero vix, aut neuix quidem id patiuntur; vnde haec nobilitatis, illa vero ignobilitatis nomine donantur. Aurum et argentum ad prius, reliqua quatuor, cuprum nempe et ſtannum, ferrum et plumbum ad poſterius genus referuntur.

§. 4. Qualitates corporum haud vllam mutationem ſubire poſſunt, quin in eorum partibus inſenſibilibus mutatio aliqua contingat. Haec autem in corpore nulla fit, niſi eidem aliquid accedat, decedatue, aut eiusdem partes transponantur. Metalla ignobilia dum calcinantur, vapores emittunt, ſenſum olfactus adeo ferientes, tuſſimque excitantes. Plumbum dum in docimaſtico furno ignis vigore in vitrum vrgetur, fumum emittit oculis ſpectandum; quae phaenomena manifeſto loquuntur, ignobilium metallorum calcinationem, vitrificationemque fieri ob deceſſum partium.

§. 5. Quamuis autem calcinata metalla etiam pondere augeantur, indeque inferri poſſit, mutationem illam ob acceſſionem alicuius materiae peregrinae fieri; verum tamen 1) reductio metallorum inferius (§. 10. et 11.) notata, deceſſum tuetur; 2) vt et metalla, quae inuitrum redacta de pondere abſoluto amittunt. 3) Augmentum ponderis in calcinatis ab alia prorſus cauſa, quam ab acceſſione materiae alicuius externae proficiſci poſſe exiſtimabit, qui grauificam materiam in liberata corpuſculorum latera a contactu per calcinationem, fortius agere debere non negat.

§. 6.

§. 6. Verum ſi alicuius corporis particulae mixti, nempe quae ratione qualitatum particularium et mixtionis integro corpori ſunt, ſimiles, vi ignis vel alia quacunque ratione detrahuntur, corpus nullam mutationem qualitatum ſuarum patitur, ſed ſolum diminuitur eius maſſa. Quod fit, vbi deſtillamus Mercurium, aut ſulphur ſublimamus. Aſt calcinatione et vitrificatione forma metallorum ignobilium immutatur. (§. 3.) Patet igitur ea eſſe corpora mixta atque calcinationis et vitrificationis tempore miſcibile aliquod volatile iisdem ſubtrahi

§. 7. Quamdiu volatile hoc ignobilium metallorum miſcibile iisdem inheret, fulgor metallicus et ductilitas manent incolumes; at quam primum ignis violentia abigitur, metalla haec in cineres ſatiſcunt et tandem in maſſam fragilem minus fulgentem conflantur. Vnde perſpicuum eſt, fulgorem et ductilitatem metallorum ignobilium a volatili illo principio pendere.

§. 8. Quamuis autem nobilia metalla per menſes validiſſimo igne exagitata vim eius eludunt; ex analogia tamen fortiſſimum adfertur argumentum, fulgoris et ductilitatis eorum rationem ſufficientem in volatili quodam miſcibili poſitam, quod fixo eorundem miſcibili multo ſtrictius adheret. Nec deſunt etiam celebrium Chymicorum teſtimonia, quae doceant, aurum et argentum leni et diuturna calcinatione in cineres conuerti poſſe (*). Ex inferius tamen dicendis erit hoc magis perſpicuum (§. 14. 15. 19.)

§. 9. Quoniam memoratum miſcibile metallorum volatile formam metallicam illis conciliat, eaque fulgido colore

* Stahlius in Tractatu de ſalibus Cap. 31.

lore quaſi tingit, quare non incongrue tincturae nomine ſalutari poteſt.

§. 10. Nitrum quamuis ad candeſcentiam vsque in puro crucibulo igne vrgetur, flammam tamen minime concipit, niſi corpus inflammabili materia praeditum illi ingeratur: tum enim pernici flamma detonare ſolet. Metalla ignobilia in ſcobem limata, cum dicto ſale in igne etiam fulminant. Vnde facile apparet, metallis ignobilibus inflammabilem quandam materiam ineſſe. Quoniam autem ea per de tonationem excuſſa, reliquum metalli in maſſam vitreſcentem redigitur. Manifeſto igitur patet tincturam metallorum ignobilium ex inflammabili ſubſtantia, quae alias apud Chymicos Phlogiſton audit, praecipue conſtare.

§. 11. Aſſerti veritatem adſtruit ipſa metallorum reductio, qua vitris et calcibus metallicis fulgor et ductilitas reſtaurantur. Etenim ad metalla reducenda phlogiſton neceſſario requiritur. Fluor niger ſic dictus qui ad hoc opus adhiberi ſaepius ſolet, nil aliud eſt, quam carbo tartari cum nitro detonati. Vitrum plumbi cum carbonibus lignorum puluerisatis, ſtannum calcinatum cum carbone ſebi vſti, cum ſulphure vero toſtum adiecta herba Nicotiana, in igne metallicam formam recuperant. Omnia autem haec corpora inflammabili materia referta ſunt.

§. 12. Nec aliae quoque operationes Chymicae idem non probant. Siquidem ſpiritibus acidis metallum aliquod ignobile praeſertim ferrum ſoluentibus, ex orificio vitri vapor prorumpit inflammabilis, qui nil aliud eſt, quam phlogiſton, frictione Menſtrui ad metalli moleculas facta (*) abſumtum, et cum tenuioribus ſpiritûs partibus

(*) Diſſertatio noſtra de actione Menſtruorum §. 14. et 31. Nou. Comm. T. i.

erumpente aere raptum. Nam 1) vapores ſpirituum acidorum puri inflammabiles non ſunt. 2) Calces metallorum, quae emiſſis ardentibus vaporibus ſoluta ſunt, ſine adiecto corpore aliquo, quod inflammabili materia ſatis abundat, reduci prorſus nequeunt.

§. 13. Quando ferrum in oleo vitrioli concentratiſſimo ſoluitur, puluis niger fundum petit, qui tandem verum ſulphur eſſe deprehenditur (*). Hoc autem conſtat ex phlogiſto et acido ſulphureo, quod cum Vitriolico eiusdem eſt indolis. Acido igitur Vitrioli ferrum ſolventi phlogiſton Martis iungitur, indeque ſulphur componitur.

§. 14. Becherus Author eſt (**) ex limo, oleo lini impraegnato et inglobulos formato, deinde toſto et a terra leuiore eluto puluerem nigrum produci, indeque magnetis virtute ferrum extrahi, cui aurum ineſt; id ipſum tamen ſine oleo lini haud vnquam ſuccedere. Ad orichalcum ex cupro conficiendum adhibetur lapis calaminaris, cui carbones triti adduntur, eum infinem, vt partes lapidis, quae metallicae ſunt indolis, reductae cum cupro coniungi poſſint (***).

§. 15. Ex allatis hactenus documentis ſatis conſtat id, quod §. 10. propoſuimus. Quae omnia licet ad ignobilia metalla potius referenda ſunt; facilis tamen eorundem cum nobilibus per fuſionem coniunctio, homogeneitatem, quae in eorum tincturis eſt, haud obſcure arguit; praeſertim cum phlogiſto ignobilium color nobiliſſimi metallorum exaltari ſoleat. Siquidem Regulus Antimonii Martialis aut Venereus, qui phlogiſto ferri aut cupri perfuſionem imprae-

(*) Stahlius in Tractatu de ſulphure.
(**) In Minera arenaria, lit. A.
(***) Stahlius in Tractatu de Sulphure.

praegnatus eſt, pulchriorem auro colorem inducit. Qui aquas gradatorias parant, ſubtiles vapores inter ſoluendum egredientes (nempe illos inflammabiles §. 12.) cohibere ſolent, metallum menſtruo parciſſime ingerendo (*) vt nempe horum auxilio ex mero argento aurum extrahant.

§. 16. Metalla in telluris gremio tingi non ſolum aurum, argentum et cuprum, quae ſaepe defaecata repeniuntur, euidentiſſime oſtendunt; ſed et ea, quae aliis mineralibus inuoluta prodeunt, idem loquuntur. Siquidem pyrites non nullos, ferri feraces ſpiritus nitri ſoluit, ſulphure, quod eosdem cum metallo iunctum componit, ſub forma pulueris fundum petente, (**) manifeſto indicio, etiam ferrum, dum inuenis adhuc heret, ſuo phlogiſto non deſtitui: cum metallum hoc phlogiſto priuatum ſpiritus nitri minime adoriri ſoleat. Adde, quod ſulphur cum metallis calcinatis in mineras conflari nequeat, id, quod cum integris facit.

§. 17. Supremi Numinis prouidentia ita comparatum eſt, vt humanum genus per telluris ſuperficiem diffuſum, quamcunque eius partem incolat, vbiuis metalla ad vſum ſuum neceſſaria reperiat. Ad haec autem progenerãnda cum ingens copia tingentis phlogiſti requiratur, eiusdem Numinis ſapientia pinguis mineralis, quod ſulphur appellamus, abundantia imas montium latebras adimpleuit, quo factum eſt, vt non olim duntaxat, et a mundi incunabulis metalla fuerint producta, verum etiam hunc vsque in diem abunde generentur. (***)

Oo 2 §. 18.

(*) Kunkelius in Lab. Chym. P. III. cap. 26.

(**) Stahlius de ſulphure.

(***) Quamuis non deſunt, qui ſibi perſuaſum habent, metalla omnia a mundi exordio ita fuiſſe a Deo creata, prout nunc foſſorum opera deteguntur.

§. 18. Tantam vero copiam ſulphuris terra in ſinu ſuo continet, vt non ſolum cryptae eius illo refertae ſint [nulla fodina aut metalli genus ſine ſulphure reperitur (*)] ſed etiam ſuper eius ſuperficiem hoc foſſile prorumpat. Montes inſularum aeſtuoſae Indiae et gelidae Islandiae, tantum ſulphuris fundunt, vt quidam eo deliburi tanquam auro inducti eminus ſpectentur. Fontes minerales plurimi flores ſulphuris natiuos proferunt. Praereliquis vero montium vulcaniorum incendia, vbi ſulphur per plurima ſaecula vaſtiſſima flamma conſumi non poteſt, id teſtantur.

§. 19. Quod vero ſulphuris phlogiſton metalla in tellure tingat, ſequentia probant. 1) Sulphur in puluerem

Verum luculentiſſima documenta non deſunt, quae partem contrariam tuentur, quorum quaedam hic recenſere lubet. In Angermannia Sweciae prouincia, venam ferri in fundo lacuum incolae piſcantur, quumque fundum euacuatur materia adeo vt nil amplius reſiduum ſit, poſt elapſos 20 aut 30 annos rurſus renaſcitur et colligitur (1). In ducatu Hetruriae mons Veſulanus minera plumbi refertus eſt, vbi putei et cuniculi gleba metallica euacuati tandem poſt 10 annos nouo implentur et denuo exhauriuntur (2). Inſula Ilua maris Tuſci ferri eſt feraciſſima, in qua exhauſtum metallum poſt 10 annos rurſus regeneratur (3) quod etiam antiquis temporibus fuiſſe patet ex illo Maronis (4)

- - - - Aſt Ilua
Inſula inexhauſtis chalybum generoſa metallis.

Aberthamiae in fodina ſancti Laurentii, quae ante 20 annos exhauſta fuit, argentum purum inuentum eſt fulcro ligneo innatum (5). Omnium autem argumentorum fortiſſimum eſt ſaepe obſeruata a foſſoribus ſterilium venarum per halitum impraegnatio, et diutum deſtructio, quod Germani Wettern vocant.

(1) Swedenborgius operum Phil. et Met. Tom. II. claſſe 1. §. 4.
(2) Bruckmanni Magnalia Dei Tom. 1. Cap. 10. (3) id. ibid.
(4) Aeneid. lib. X. v. 174.
(5) Löhnheiß Bericht von Bergwercken 1. Theil.

(*) Löhnheiß Bericht von Bergwercken 1. Theil.

rem redactum et cum arena aut limo tritum, et tandem eadem ratione tractatum; prout §. 14. de limo et oleo lini dictum eſt, metallum largitur (*). 2.) Idem minerale metalla viuidiore colore tingit, quod videre eſt in minera plumbi ſplendida, vt et in pyrite ſulphureo Martiali aut Venereo: 3.) Aurum cum ſalibus et aqua leniter tritum odorem ſulphureum emittit (**). 4) Maius tamen firmamentum affert dicti phlogiſti identitas. Enimuero prout metalla ex calcibus et vitris plerumque vegetabilium carbonibus reducuntur, vt ſupra §. 11 monuimus; ita quoque et ſulphur regeneratur ex oleo vitrioli, quod cum alcali fixo combinatum et adiecto puluere carbonum in hepar colliquatum, denique aqua ſolutum et transcolatum aceto deſtillato in lac ſulphuris praecipitatur.

§. 20. Ceterum metalla cum fulgore tum etiam ductilitate multum inter ſe differunt; cuius diſcrepantiae ratio ſufficiens quaerenda eſt in reliquis metallorum miſcibilibus, quae phlogiſto varia proportione admixta ſimul cum illo in ſuperficie cuiuslibet corpuſculi metallici mixti haerent. Etenim cum fulgor et ductilitas a phlogiſto proficiſcantur, ſequitur metalla, quae magis fulgida et ductilia ſunt, horum ſuperficiem denſius phlogiſton occupare, quam eorum, quae minus fulgent, minusque ductilia ſunt; adeoque, vbi inflammabile minus ſtipatum ſuperficiei corpuſculorum mixti adhaeret, ibi neceſſe eſt, vt particulae aliorum miſcibilium illis ſint interpoſitae, vel per eius interſtitiola proſpiciant.

§. 21. Acidum principium tincturae quorundam metallorum admiſceri, et quidem diuerſa quantitate, haud leuibus

(*) Stahlii Fund. Chym. p. 102. §. 14.
(**) Stahlius in Fund. Chym. Lapide. de auro.

ſibus documentis conuincimur. Etenim metalla phlogiſton ſuum ex ſulphure recipiunt (§. 17. 18.) adeo igitur probabile eſt, etiam acidum ſulphuris cum ipſis metallis iungi. Denique metalla ignobilia cuprum nempe et ferrum, quae minus ductilia ſunt minusque fulgent, quam nobilia, minore quantitate phlogiſti praedita ſunt (§. 20.) ad ſtringente tamen virtute gaudent, quae acidorum corporum eſt propria. Porro omnia metalla acidis ſpiritibus ſoluuntur, et quidem eo promptius, quo magis ſtiptica ſunt. Cum vero ad corpora in menſtruis ſoluenda homogeneitas eorum multum conferat (*), dubitandum ſane non eſt, quin metallis, praeſertim vero ſtipticis, cum phlogiſto etiam acidum inhereat. Hinc non ſine ratione ſulphur crudum ferro a Swedenborgio adſcribitur, (**) nempe acidum ſulphuris cum phlogiſto coniunctum. Confer experimentum apud Cel. Pott deſcriptum. (***) qui ex metallis ſolutis in ſpiritu nitri et ſale communi aut eius ſpiritu praecipitatis et cum Mercurio deſtillatis, veram cinnabarim obtineri aſſerit. Huc quoque pertinet, quod argentum cum ſulphure confuſum conuertitur in mineram mollem, Glaß-Ertz, plumbo non abſimilem: nempe adiecto ſulphure, nobile et adeo ductile atque fulgidum metallum ad ignobile accedit.

§. 22. Arſencium metalla tingendi virtutem poſſidet; ſtanno duritiem ſonumque conciliat, et ipſum compactius reddit; cuprum et ferrum dealbat, atque cum ignobilibus metallis per fuſionem vnitum et diutius tractatum partem eorum

(*) Diſſertatio Noſtra de actione Menſtruorum §. 10. Nou. Comm. T. I.
(**) Operum phil. et Metall. Tom. II. de ferro. Claſſis 1. §. 1.
(***) Diſſertatio de ſulphuribus metallorum §. 4.

eorum nobilitat (*). Vnde maxime probabile eſt, partem quandam arſenicalem tincturam metallorum ingredi, [praeſertim vero eorum, quae frequentius cum arſenico, quam cum ſulphure ex venis eruuntur] eaque ab aliis fulgore et tenacitate diſtinguere. Quod prae reliquis de ſtanno non ſine ſufficiente ratione affirmari poteſt. Siquidem, 1) hoc metallum ſemper in gleba arſenicali reperitur. 2) Ductilitas eius non ſolum nobilium verum etiam quorundam ignobilium metallorum tenacitati multum cedit; haec vero aliquo principio, inflammabili materiae heterogeneo, tincturae admixto, infringitur. (§. 19.) Quod tamen acido tribuere non audemus, cum ſtannum ſit minus ſtipticum, quam alia metalla ductiliora. 3) Stannum lubentius in eis ſpiritibus ſoluitur, quibus acidum ſalis ineſt. Hoc autem quam analogum arſenico ſit, inde perſpici poteſt, quod cum argento in corneam ſubſtantiam fuſum et ſublimatum materiam exhibeat venenoſam, et quo ad formam externam, arſenico non abſimilem.

§. 23. Nec parua ſuſpicio eſt etiam argenti et cupri phlogiſto arſenicale aliquod miſcibile inherere, cum vtrumque ſaepius cum arſenico ex terra eruatur. Vena cupri arſenicalis, quando in cumulos congeſta igne per menſem et amplius torretur et ad fuſionem praeparatur, in filamenta cuprea ſplendiſſima et coloribus iridis ludentia excreſcit, quae adeo congrue arbor veneris ſalutari poſſunt. Quod etiam cum minera argenti rubea, Rothgülden Ertz, dicta, factum apud Cel. Henkelium, videre mihi aliquoties licuit. Nempe laudatus Auctor dictam gle-

(*) Pott in diſſert. de Anat. Auripigmenti §. 13.

bam argenti arſenicalem per menſes in arena digeſſerat, ignis gradum eiusmodi ſubminiſtrans, quo arſenicum, aegerrime quidem ſublimari poteſt. Tum argentum, volatili illo corpore in auras recedente, in tenuia filamenta diſtractum eſt. Vtraque experientia homogeneitatem arſenici cum argento et cupro non obſcure indicat.

§. 24. Non exiguum firmamentum aſſertis (§. 20-23) inde affertur, quod ſulphur et arſenicum largius metallis perfuſionem addita, ductilitatem eorum prorſus infringunt. Et hinc Regulum Antimonii, Zincum et Wismutum nil aliud eſſe ſuſpicamur, quam metalla nimio ſulphure vel arſenico, aut vtroque ſimul intimius cum iis iuncto, onerata et fragilia facta.

§. 25. Quoniam autem ad fulgorem conciliandum non parum confert, etiam aequabilis partium diſpoſitio, qua radii ſolis paralleli reflectuntur, magisque fulgent, quam confuſi; vnde mirum non eſt ſupradictis ſemimetallis fulgorem vtcunque conſeruari, quamuis nulla ductilitate amplius gaudeant.

§. 26. Ad haec omnia dilucidius exponenda atque firmius demonſtranda plura quidem, et forte non alias vnquam tentata, conferre poſſemus, quae iam ante aliquot annos animo concepta habemus; verum quoniam laboratorio Chymico deſtituimur (*), ideo cum ab ipſis experimentis inſtituendis prohibemur, tum etiam deducendis inde argumentis caremus.

§. 27. Quamuis autem nos haud lateat, plurima proſtare experimenta, quibus oſtenditur modus ſulphura et tincturas metallorum extrahendi, quod videre eſt in ſcriptis Is. Hollandi et in Diſſ. Clar. Pott de ſulphuribus metallorum.

(*) Nempe quando ſcripta eſt haec diſſentatio An. 1745. Quod tamen An. 1748, dirigente Academiam Praeſide Excellentiſſimo Comite Razumowsky, exſtructum eſt.

tallorum. Verum gemina et ſincera haec metallorum miſcibilia ſeparatim ſiſti poſſe non facile credendum eſt, cum ad ea elicienda ſalina et ſulfurea corpora praeſcribantur; quae licet ſpecioſo nomine aperientium obuelantur, non tamen ſuſpicari non poſſumus, quin eadem, quae ad metalla aperienda adhibentur, cum mixtis metallorum corpuſculis combinata, ſaepius, ſi non ſemper, pro quaeſitis venditentur.

§. 27. Finem verbis impoſituri non inutile fore arbitramur, ſi analogicam aliquam coniecturam de metallorum transmutatione adiiciamus, quam a trasmutandis eorum tincturis, de quibus nunc egimus, proficiſci poſſe exiſtimamus.

§. 28. Qui artem ſpagiricam vel a limine ſalutauerunt, haud iam ignorant, acida debiliora ex alcalinis per fortiora expelli et quaſi praecipitari. Sic acetum affuſo ſpiritu ſalis ex cineribus clauellatis extruditur; ipſe vero nitroſo ſpiritui locum cedit, per acidorum fortiſſimum, quod ſulfreum eſt, expellendo. Acidum ſulfreum omnium puriſſimum et ab heterogeneis partibus defaecatiſſimum eſſe a Chymicis cenſetur: nam nitroſo ſpiritui inflammabile, ſalino autem arſenicale aliquid in eſſe affirmant; acetum empyreumate inquinatum eſſe deſtillatio eius ex arena prodit. Quibus ſingulis acidae particulae magis magisque debilitantur, minusque aptae redduntur ad alcalia firmiter ſibi adiungenda. Quo cum etiam grauitas eorum ſpecifica conuenit: etenim ſpiritus acidus ſulfuris quo concentratior eſt, eo etiam ſpecifice grauior; vnde patet, grauitatem ſpirituum ab acidis particulis augeri. Hinc quoque ſpiritus acidi, quo fortiores ſunt et cum

 alcali

alcali arctius iunguntur, eo ſunt etiam ſpecifice grauiores. Quippe pollex cubicus olei vitrioli, quod cum ſpiritu ſulfuris eſt eiusdem indolis, ponderat drachmas 7 et grana 59, Spiritus Nitri dr. 6, gr. 24; Spiritus ſalis dr. 5. gr. 49, acetum deſtillatum dr. 5. gr. 11. (*)

§. 29. Non abſimili ratione intransmutandis metallis naturam, artificum induſtria opem ferente, procedere poſſe arbitramur. Si quidem phlogiſton concentratius, quod metalla nobiliora tingit, iisdem firmius adheret. Itaque ſi quis in arte Chymica verſatiſſimus phlogiſton concentratiſſimum et ab heterogeneis ſolertiſſime defaecatum poſſidet; eum metalla ignobiliora, tinctura impuriore expulſa, in nobiliſſimum metallum praecipitare et conuertere poſſe credimus.

(*) Eiſenſchmidius in diſquiſitione noua de ponderidus et menſuris p. 174.

De

DE ELECTRICITATE IN CORPORIBVS PRODVCENDA NOVA TENTAMINA.

AVCTORE
G. W. Richmann.

1.

Iam diu notum eſt arte in corporibus produci poſſe proprietatem, vel ſi dicere mauis, vim, virtutem qua alia leuiora corpuſcula diſtantia, vel maiora pendula et aequilibrata attrahere et repellere etiam ſaepius valent, ſimulque in tenebris et crepuſculo admotis corporibus, hac virtute non imbutis facile tamen illa imbuendis, lucent, ignemque ſiſtunt, qui tandem materiis inflammabilibus accendendis aptus obſeruatus eſt. Hanc virtutem electricitatem appellant philoſophi, et eſt vel originaria, quae ſolo tritu corporum certorum ſolidorum, e. g. vitri, reſinae, ſulphuris, laccae ſigillatoriae produci poteſt, vel deriuatiua, quae a corporibus electricitate originaria donatis propagatur e. g. in metalla, corpus animale, aquam, glaciem, ligna, plantas etc. Reſina vero, Sulphur, Colophonium, Lacca ſigillatoria ſola frigefactione poſt fuſionem adipiſcuuntur virtutem attrahendi corpuſcula leuiora et ſi defendantur ab humiditate aëris per annua ſpatia conſeruant. Deriuatiuae vero electricitatis minimo gradu capacia corpora, non ſolum ſunt omnia ea, quae electricitatem originariam admittunt,

ſed et ea, quae eam, quia tritu emolliuntur, non admittunt, ſimulque a corporibus originaria electricitate donatis electricitate imbui ſenſibiliter haud poſſunt e. g. ſebum.

§. 2. Occupatus inſtituendis et imitandis experimentis de hac dicta proprietate corporum offendi

1) Quaedam phaenomena, quae ab autoribus, qui de electricitate varia annotarunt et inueſtigauerunt, non obſervata inueni.

2) Nouam methodum commode inſtituendi experimenta et examinandi corpora, quae originariae et alia, quae deriuatiuae electricitatis ſolum capacia ſunt.

3) Sub menſuram etiam aliquatenus productam electricitatem reuocare anniſus ſum.

Haec qualiacunque tentamina cum ſocietate communicare animus eſt.

§. 3. Primo ea experimenta imitari conſultum duxi, quae admirationem orbis eruditi non ſolum, ſed et principum perſonarum meruerunt, e. g. illud, quo ex metallis et homine ignis et lux concrepans elicitur, quo ſpiritus vini calefactus accenditur; quod cum feliciter perfecerim, ſimulque ex aqua et niue et glacie eundem ignem cum concrepatione coniunctum elicuerim, etiam alia, quae licet non ita in admirationem rapiunt obſeruatorem, fortaſſis tamen plus faciunt ad doctrinam de electricitate amplificandam et explicandam inſtitui optimo cum ſucceſſu.

§. 4. Menſis Februarii huius anni 1745 initio tentaminum initium feci in domo lignea et primo vſus ſum tubis vitreis ad excitandam electricitatem, manibus vero et brachiis frequenti tuborum tritu langueſcentibus et dolentibus, ſedulo cogitaui, qua ratione Machina electrica

quam

quam Grauesande in Elem. phyſices mathematicis deſcribit ſic inſtrui poſſet, vt illa commode vti valerem. Quia conclaue, quo inſtituere volebam experimenta, cellae imminebat, ſphaera per machinam celeriter circumgirata, concutiebantur ferme omnia ſupellectilis, quin ipſi parietes lignei domus, et reſina, qua axes firmati erant, incaleſcentibus celeri motu axibus, mollis reddebatur, vt poli ſitum mutarent et motus oriretur vacillans; electricitati, vt quidam afferunt noxius e. g. Clariſ. Boſe in Commentariis de electricitate. In machina electrica id mihi etiam eximiam moleſtiam creabat, quod ſaepius cogebar funes detritos et laceratos mutare, vel laxatos arctius ligare, quod dimidiae horae labor erat. Omnibus his incommodis medelam afferre volebam. Paucis enarrabo, quomodo machinam vſui accommodauerim. Loco funis 10. pedum Lond. rotam circumdantis, elegi funem 28. ped. qui ferme ter diutius in aequali motu durare debet, duxi illum circa axin ſpharae vitreae, rotam machinae, et trochleam, extrema filo lineo bene ligaui. Trochleam vero cum alio fune iunxi et deinde adduxi funem, et firmaui circa clauum robuſtum ferreum immobilem. Cum ſphaeram circumagerem, rota in duobus minutis ſecundis ſemel circumacta, ſphaera duodecim vicibus circumibat. Hanc celeritatem obſeruaui ſufficere experimentis, ſphaeramque ſine concuſſione machinae circa axin ſine motu nimium vacillante ferri. Poſtquam hoc animaduertiſſem tubos vitreos plane neglexi et experimenta cum tubo vitreo moleſte inſtituta, machina dicta repetii feliciſſime et alia multa addidi.

§. 5. Anteqnam vero experimenta inſtituta enarro, ſequentibus deſcribam totum apparatum ex quo methodus ea inſtituendi, quam adhibui, patebit.

Tab. VI. 1) A machina Graueſandiana A filum ferreum 24. ped. Lond. B. C. D. E. F fulcitum funibus ex ſerico coerulei coloris, B *a*, C *b*, D *c*, E *d*, duxi et coniunxi cum fulcimento ferreo G, et ex filo ferreo B, C, D, E, F appendi filum ferreum incuruatum, ſphaeram cum conuexo latere tangens et eam circumactam radens, *e f*.

2) Fulcimentum ferreum G, erat in reſina poſitum, qua vas conicum H farctum erat ſimulque externa vaſis ſuperficies reſina obducta. Minima ferri electrificandi diſtantia a parietibus vaſis ligneis erat vnius dig. Lond. et dimidii.

3) Cum Fulcimento ferreo G, cuius pondus erat 20. libr. Ruſſ. coniunxi regulam ferream I K $\frac{3}{4}$ libr. Ruſſ. mediante fune, vt extremitas K, a fulcimento ferreo G, diſtaret 19 $\frac{1}{2}$ poll. Lond: Cum hoc ferro regulam ferream L M ponderis dimidiae librae Ruſſ. Longitudinis 20 $\frac{1}{2}$ dig. Lond: in K mediante filo ferreo coniunxi.

4) Prope laminam K ligaui filum lineum K O, longitudinis duorum pedum Londinenſium, eius tenuitatis, vt 456. digitos Lond. longum, ponderaret 16. grana, qua propter filum ex lino K O ponderatum exhibere debuit $\frac{384}{456}$ vnius grani. Filum dictum hoc ita ligaui, vt incumberet laminae K et penderet in ſitu cum regula B M parallelo, in diſtantia $\frac{4}{10}$. dig. a regula L M.

5) Cum menſa in qua vas reſina fartum collocatum erat coniunxi arcum circuli MOP ligneum 40. graduum. Diuiſi arcum hunc

hunc in gradus, et quemlibet gradum in quattuor aequales partes. Extremitas fili linei diſtabat ab arcu circuli duas lineas.

Fulcimento ferreo G, electricitate donato filum lineum K C propellitur a ferro inprimis regula ferrea L M, et oſtendit in arcu M O P, gradum, qui ſi maior eſt, indicat maiorem electricitatis gradum, nondum vero aſſero electricitatem hoc indice accurate menſurari poſſe, niſi perfectior reddatur, et ipſa theoria vorticis electrici amplificetur, ad quam perficiendam initium fecit B. Hauſenius in Hiſtoria electricitatis.

6) Ex altera parte fulcimenti ferrei G cum fulcimento regulam ferream Q R S ponderis dimidiae librae Ruſſ. coniunxi; R. diſtabat a fulcimento ferreo 15 $\frac{1}{2}$ dig, Lond. et

7) Ex puncto R regulae Q R S filum ferreum coniunxi; cum quo mediante filo lineo malleum ferreum quadrangularem longit: 6 $\frac{1}{5}$ dig. Lond. pond. $\frac{1}{3}$ lib. Religaui, ſic vt extremitas (b) diſtaret a filo ferreo dimidiam lineam, altera vero incuruata eſſet planum diagonale verſus, Hoc facto

8) In menſa fulciui in diſtantia ſemidigiti a malleo ferreo pendulo in ſuſtentaculo vitreo campanam metallicam T, ponderis $\frac{3}{4}$ librae Ruſſ. ſic vt malleus *b e* feriens campanam T, eam cum parte, a ſuperiori extremitate quatuor et dimidium dig: diſtanti tangeret.

9) Aliam campanam V appendi ex regula ferrea Q R S mediante filo ferreo, ponderis dimidiae librae Ruſſ. ſic, vt tres lineas diſtaret a baculo quadrangulari.

10) Prope Campanam V ex regula Q R S pendulam alium malleum *f g* ſimilem appendi ex filo ferreo, vt

non

non connexus eſſet cum apparatu electrificando, in diſtantia duarum linearum a campana pendula.

11) Ex medio regulae ferreae Q R S appendi ex filo ferreo ferrum *m* ponderis duarum drachmarum, cuius extremitas in ſphaericam figuram abibat.

12) Ex parte regulae Q R S fulcimento ferreo G propinqua appendi filum ferreum, *b k*, vt cum eo poſſem ſphaeras coniungere corpuſculis leuioribus e. g. foliis auri attrahendis et repellendis aptas.

13) Ex fulcimento ferreo duxi filum ferreum 24. pedum Londinenſium 1. 2. 3. ad pondera 300. librarum Ruſſ. in reſina poſita. Filum ferreum B C D E F et 1. 2. 3. ponderatum vnam et dimidiam libram Ruſſ. exhibebat ſic vt totus apparatus electrificatus eſſet fermo 324 librarum Ruſſ. Ponderum ferreorum in reſina collocatorum diſtantia minima a parietibus vaſis ligneis erat 2 dig. Lond.

14) Suſpendi ex fune ſerico coerulei coloris Bilancem magnam W cuius pondus erat 12 librarum Ruſſ. funem hunc ſericum in diſtantia vnius pedis cum fune cannabino iunxi; quem ſuper trochleas ad lacunar firmatas, X Y duxi et ex extremitate Z appendi pondus aequale ponderi Bilancis. Imminebat bilanx ponderibus ferreis (3) in reſina poſitis. Extremum pondus ferreum erat lamina ferrea Longit. duorum pedum et latitudinis 26 dig. L. craſſitiei quatuor linearum. Haec lamina ita fulcita erat, vt ad ſenſum eſſet horizontalis.

15) Firmaui ad parietem regulam ligneam α, β prope pondus Z; vt in ea notarem diſtantiam lancis γ a lamina ferrea.

16)

16) Prope Bilancem et pondera ferrea in reſina poſita collocaui fulcimentum ligneum, quod ope forcipis cum bilance iungere potui. His ordinatis ſequentia exprimenta commode inſtituere licuit.

Experim. I.

§. 6. Si homo reſinae inſiſtens ad ſphaeram vitream cauam diametri 10 dig. Lond. et, cum axibus orichalceis ponderis 9 librarum Ruſſic. per machinam Graueſandianam circumactam adplicat manum, ipſe electrificatur et per filum BCDEF electricitatem communicat cum toto apparatu electrificando in reſina collocato. Si homo ſic electrificatus tangit filum ferreum electrificatum BCDEF eiaculatur ignis concrepans vehementiſſimus die viſibilis ſpiritum vini accendens etc. et index electricitatis recedit et applicat ſe regulae ferreae pendulae. Homo tali ratione electrificatus ſi tangitur dat ignem concrepantem, vel ſi tangitur ab alio in reſina ſtante et ex altera parte ſphaerae manum adplicante ad ſphaeram. *

Experim. II.

Si homo reſinae inſiſtens adplicat manum ad ſphaeram et altera tenet filum ferreum, cuius altera extremitas tenetur ab homine, ſtante in reſina prope pondera ferrea (3) in reſina collocata, et tangente pondera, nulla electricitas oritur, et index ſemper oſtendit gr 0. Nihilque ex toto apparatu electricitate donatum obſeruatur. * Si idem homo iisdem poſitis circumſtantiis non tangit pondera ferrea, homo et pondera electrificantur, indexque ad 25. gr. eleuari poteſt. Si hac electricitate excitata adplicat digi-

 tum

(*) Corpus ergo electrificatum agit in electrificatum ſi non connexum eſt cum altero per corpora deriuatiuae electricitatis.

tam ponderibus electricitate donatis, oritur ignis vehemens concrepans die viſibilis et index recedit et adplicat ſe regulae ferreae pendulae.

Experim. III.

Si homo in reſina ſtans et adplicans manum ſphaerae altera manu tenet tubum vitreum *a b*, qui per duo orichalcea prismata *c* et *d* tranſit, quorum *d* mobile eſt, et adplicat prisma *d* filo ferreo deriuanti electricitatem, digito prisma *c* tangens electricitateque producta et indice oſtendente gradum 25, premit parallelepipedum *d* verſus alterum *c* ſenſim, in diſtantia quatuor linearum interdum octo oritur ſcintilla concrepans vehemens et index obſeruatur recedere ad gr. 16. obſeruatur etiam ſaepe lux radiata coerulei coloris continuo fluens ex corpore electrificato inter prismata, cum ſtridore et ſuſſuro, odoris, phoſphori Brandii ſimilis. Ceſſante motu rotae, ſi propinquius redditur prisma *d* prismati *c*, vt diſtantia ſit e. g. trium linearum ferme, iterum oritur ſcintilla ſed imbecillior et index recedit ad minorem gradum e. gr. 7. tandem prismate *c* prisma *d* contingente electricitas tota aufertur et index redit ad gr. o. quin ipſi regulae L M ſe adplicat. Si cochlea foemina ex metallo ambit cochleam marem ex vitro, ex numero reuolutionum melius diſtantia indicatur, vel ſi in propinquitate corporis electrificandi fulcitur cochlea foemina, per quam cohlea mas tranſit, pariter ex numero reuolutionum diſtantia a corpore electrificando innoteſcit.

Experim. IV.

Si poſitis circumſtantiis experim. II. homo in reſina iuxta pondera (3) ſtans, adplicat priſma *d* ad pondera ferrea, electricitate producta et indice oſtendente gr. 25. in diſtantia trium linearum priſmatis *c* a priſmate *d* oritur ſcintilla vehemens concrepans et index recedit a 25. gradu ad 18. gr. motu rotae ceſſante ſi propinquius redditur priſma *c* priſmati *d*. iterum oritur in diſtantia vnius et dimidiae lineae ſcintilla ſed imbecillior, tandem contingentibus ſe priſmatibus, tota electricitas auſertur et index oſtendit gr. o. quin regulae L M ſe adplicat.

Experim. V.

Si homo adplicans manum ad ſphaeram non inſiſtit reſinae ſed ſolo ex aſſeribus compaginato et electricitas excitatur indicem eleuans ad gr. 25. priſmate *d* adplicato ad filum ferreum electrificatum ab homine ſolo ex aſſeribus compaginato inſiſtenti, et priſmate *c* priſmati *d* ſic appropinquato vt tres tantum lineas diſtet, oritur ſcintilla concrepans vehemens et index redit ad gr. 16. Si priſma *c* adhuc propinquius redditur primati *d* vt 2. lineas diſtet, oritur iterum ſcintilla concrepans indice recedente ad gr. minorem e. g. 11. Priſmate *c* magis appropinquato priſmati *d* oritur ſcintilla concrepans debilior praecedenti, et index minorem gradum adhuc oſtendit e. g. 7. tangentibus vero ſe mutuo priſmatibus *c* et *d* tota electricitas auſertur et index oſtendit gradum o, quin applicat ſe regulae ferreae.

Experim. VI.

Si electricitate indicem eleuante ad gr. 25. tangitur filum ferreum ab homine, ſolo ex aſſeribus compaginato inſiſtenti, ceſſat tota electricitas, et index ſeſe adplicat regulae ferreae.

Experim. VII.

Si electricitate indicem eleuante ad 20. gr. tangitur filum ferreum ab homine in reſina ſtante, index adhuc oſtendit gr. 10. Si ab alio non ſtante in reſina tangitur tota electricitas aufertur et index oſtendit gr. 0. quin ſeſe adplicat regulae ferreae.

Experim. VIII.

Si electricitate indicem eleuante ad gr. 20. priſma *d* admouetur filo ferreo electrificato ab homine in reſina ſtante et alterum priſma *c* ſenſim appropinquatur priſmati *d*, in diſtantia duarum linearum oritur ſcintilla concrepans et index recedit a gr. 20. ad gr. 16. deinde ne quidem contigentibus ſeſe priſmatibus *c* et *d* ſcintilla oritur, nec index mutatur. Si vero electricitas homini in reſina ſtanti aufertur, denuo adplicans priſma elicit iterum ſcintillam concrepantem aſt debiliorem, priſmate *c* a priſmate *d* minus diſtante quam priori caſu. Et tali ratione electricitas auferri poteſt, vt reſidua non ſit ſenſibilis.

Experim. IX.

Maſſa 324. librarum electrificata et indice oſtendente gr. 20. index primo minuto primo temporis receſſit ad gr. 19.

2do min. pr. - -	18½
3 - - - - -	18
4 - - - - -	17
5 - - - - -	16½
6 - - - - -	15½
7 - - - - -	14
8 - - - - -	13½
9 - - - - -	13
10 - - - - -	12
11 - - - - -	11½
12 - - - - -	11
13 - - - - -	10½
14 - - - - -	10
15 - - - - -	9¼
16 - - - - -	9
17 - - - - -	8½
18 - - - - -	8
19 - - - - -	7¾
20 - - - - -	7
21 - - - - -	6½
22 - - - - -	6
23 - - - - -	5½
24 - - - - -	5¼
25 - - - - -	5
26 - - - - -	4¾
27 - - - - -	4½
28 - - - - -	4¼
29 - - - - -	4
39 - - - - -	2¼
40 - - - - -	2

45 - - - - - - - $1\frac{1}{2}$
50 - - - - - - - 1.

Durauit hinc electricitas, maſſae 324. libr. Ruſſ. communicata, a gr. 20. ad gr. 1. per 50. min. pr. et index per gradus vltimos lentius receſſit, quam per gradus priores. In palatio imperatorio lapideo electricitas durauit tantum duo minuta prima a gr. 25. ad gr. 1.

Experim. X.

Idem experim. 9. alio tempore inſtitutum eſt, maſſa 324. libr. Ruſſ. electrificata et indice oſtendente gr. 25. index receſſit

5 primis min. prim. ad gradum 15
16 min. prim. - - - - - - 8
25 min. prim. - - - - - - 5

durauit hic electricitas, maſſae 324. libr. Ruſſ. communicata a gr. 25. ad gr. 1. per 25. min. pr. et rurſus index per gradus vltimos lentius motus obſeruatus eſt.

Experim. XI.

Eodem tempore inſtitutum quo praecedens.

Maſſa 24. libr. Ruſſ. electrificata et indice oſtendente gr. 25. - - - - - -

5 prim. minutis primis index receſſit ad gr. $11\frac{1}{2}$
10 - - - - - - - - - - - 4
15 - - - - - - - - - - - 1.

Ergo ſi minor maſſa electrificatur electricitas citius ceſſat ſ. annihilatur. - - - - - -

Experim. XII.

Maſſa 24 libr. Ruſſ. electrificata et faſciola ſerica pollicem lata et 3. pollices longa, rubri coloris, firmata

ta ad filum ferreum electrificatum, electricitatis index, manu ad alteram extremitatem faſciolae adplicata receſſit per 5. min. prim. a gr. 25. ad gr. 6. Faſciola purpurea, aurantia, violacea, eadem ratione examinata idem obſervatum eſt, nimirum indicem a gr. 25. ad gr. 6. 5. minutis primis receſſisſe. Faſciola alba, coerulea, viridi et flaua eadem ratione examiuata, 5. minutis primis index a gr. 25. ad gr. 8. receſſit. Nigra vero faſciola examinata, 3. minutis primis electricitas prorſus euanuiſſe obſeruata eſt. Index per ſe a gr. 25. ad gr. 6. quinque minutis primis recedebat. Hinc iudicare licet faſciolam ſericam nigram vnicam deriuaſſe electricitatem ſenſibiliter, alias vero non item. Si humectabantur faſciolae ſtatim omnis electricitas adplicata manu ceſſabat.

Experim. XIII.

Filum lineum candidum humectatum eius tenuitatis vt 24. fila longit: 19. dig. Lond. pondus 16. granorum efficerent, imponebatur ferreo filo et electricitate ad gr. 25. excitata, manus adplicabatur ad filum humidum ſtatim electricitas tota ceſſauit, nec reſtitui potuit per continuatum ſpharae motum. Electricitas vero non ceſſabat, ſi funis, ex 108. filis talibus compoſitus ſiccus ferreo filo imponebatur et manu trahebatur. Ceſſante tamen ſphaerae motu, interuallo vnius minuti primi index a gr. 25. ad gr. 1. recedebat. Hinc indicare licet funes ex ſerico, fulciendis corporibus electrificandis, aptiores eſſe, quam funes ex lino confecti.

Experim. XIV.

Omnia corpora humectata, admota manu filo ferreo electrificato, electricitatem ſtatim omnem tollunt, vt index oſtendat gr. 0. et ſeſe adplicet regulae ferreae pendulae e. g. etiam ſulphur, vitrum, porcellana, reſina, lacca ſigillatoria, cera, funes ex ſerico, quae omnia ſunt deriuatiuae electricitatis incapacia, ſi ſunt ſicca.

Experim. XV.

Si malleus ferreus eſt pendulus in diſtantia ſemidigiti a campana T et electricitas excitatur, vt index oſtendat gr. 12. campanarum percuſſio a malleo incipit et creſcente electricitate, percuſſiones celerius ſe excipiunt, ceſſante vero ſphaerae motu et electricitate decreſcente, percuſſiones lentius ſe excipiunt et tandem indice recedente ad gr. 11. campanarum percuſſiones plane ceſſant. Si index oſtendit gr. 25 - 20. percuſſiones ſunt efficaces, ignis enim concrepans elicitur (1) tam in puncto *e* vbi campana percutitur a malleo, quam 2) in puncto *b*, vbi malleus cum filo ferreo mediante filo lineo coniunctus eſt, et ſi multa fila ferrea dicta ratione filo lineo coniuncta ſunt, multae ſtellae lucidae coeruleae cernuntur qualibet percuſſione. 3) in puncto *n*; malleus enim *nb* diſtributa electricitate ſua per campanam T et non electricus redditus vel ſaltem minus electricus redire debet et percutere etiam campanam electrificatam V cum incuruata extremitate, vnde lux. 4) Malleus *f g* non electricus etiam ferire debet campanam electrificatam V et ſcintillam concrepantem elicere. Si ſphaera adplicata manu continuo circumagitur, continuo cernuntur fulgura in dictis punctis.

Schol.

Schol. Non dubito inſtrumentum muſicum diuerſis campanis et malleis rite prope apparatum electrificatum ordinatis, vel cum apparatu connexis, condi poſſe, quod vi electricitatis animari poſſit.

Experim. XVI.

Remota campana T et electricitate ad gr. 25. excitata, non excitatur ſonitus malleo *b e* et campana V quia ambo haec corpora electricitate aequali ſunt donata. Malleus tamen non electrificatus *f g* percutit campanam V et elicit ignem concrepantem.

Experim. XVII.

Si campana T iterum admouetur electritasque excitatur, campana T quidem vna atque altera vice percutitur a malleo *b e*, aſt non continuantur percuſſiones, licet index oſtendat ſummum electricitatis gradum. Diſtribuitur electricitas per campanam T ipſam vitreo ſuſtentaculo incumbentem, hinc campana ipſa fit electrica, hinc phaenomenon electricitatis ceſſare debet. Statim vero, cum admouetur digitus ſuſtentaculo ferreo campanae T, cum vitro coniuncto, ſonitus cum concrepatione et luce exoritur. Notandum hic

1) Admoto digito ad ſuſtentaculum ferreum campanae ſentiri ictum, indicem electricitatis per campanam diſtributae et per manum hominis deriuatae in infinite multa corpora.

2) Hoc ipſo campanam perdere electricitatem ſuam et fieri corpus non electrificatum, hinc malleum electrificatum attrahi debere.

Experim. XVIII.

Si homo reſinae inſiſtens adplicat manum ad ſuſtentaculum ferreum campanae vitro fulcitae diutius campanarum ſonitus durat, quam ſi campana ſola T vitro fulcita agit in malleum *b e*, tandem tamen ceſſat, licet index oſtendat gradum electricitatis maiorem 12. gradibus. Si vero tangitur talis homo in reſina ſtans, ſtatim campanarum ſonitus producitur. Finitae hinc molis corpus non eſt aptum ad ſonitum campanarum conſeruandum, infinitae aptiſſimum, quale eſt campana connexa cum homine, non ſtante in materia deriuatiuae electricitatis incapaci, vel cum aliis corporibus deriuatiuae electricitatis, non collocatis in materiis deriuatiuae electricitatis incapacibus.

Experim. XIX.

Corporibus humectatis adplicatis ad filum ferreum, campanarum ſonitus ſtatim ceſſat, tollitur enim ſic omnis electricitas. Exper. 14.

Experim. XX.

§. 9. Aqua in vaſe metallico laminae ferreae 3) impoſita et ſphaera circumacta manu ad ſphaeram adplicata, digitum appropinquaui ſuperficiei aquae et ſcintillas elicui valde concrepantes ex aqua, easdem etiam ex niue glacie, mercurio viuo, aceto, ſpiritu vini, lacte, ſpiritibus acidis produxi etc. de ſcintillis talibus aquae B. Hauſenius dubitat, B. du Fay affirmat. et Clariſſ. Boſius confirmat et alii.

Ex-

Experim. XXI.

Maſſam glaciei in orbe ſtanneo poſui et in lamina ferrea 3) collocaui, naphtam deinde albam infudi in cochleare metallicum paruum, calefactum, et electricitate 25. gr. excitata tenui cochleare in diſtantia digiti a ſuperficie glaciei verticali et accenſa eſt naphta.

Experim. XXII.

Suffulciui bene cochleare metallicum in lamina ferrea 3) calefactum prius, infudi cochleari naphtam electricitateque 25. gr. excitata, continuataque circumactione ſphaerae, appropinquaui maſſam glaciei, vt diſtaret a parietibus cochlearis digitum ferme, et accenſa eſt naphta.

Experim. XXIII.

Spiritum vini calefactum electrificatum, naphtam calefactam, ſpiritum Forbenii frigidum electrificatos, digito vel metallo non electrificato accendi. Non electrificatos accendi cum digito vel metallo electrificato.

Experim. XXIV.

Aquam in patina ſtannea in menſa ſub ſtilo ferreo *l m* ex regula ferrea Q R S pendente poſui, vt ſuperficies aquae diſtaret 3. circiter lineas, electricitateque excitata obſeruaui aquam eleuari attingentemque ferrum elicere lucem, dein reſilire et rurſus eleuari et eandem lucem excitari etc. In ſpiritu vini, mercurio, aceto, ſpiritu nitri aqua diluto idem obſeruaui, ſi in aptis vaſis ſtilo ferreo *l m* propinqua erant.

Experim. XXV.

Vas metallicum, laminae ferreae 3. inpoſui et ſiphonem aquae in vaſe ſtagnanti immerſi, et ſuctione effeci, vt ſipho fluere inciperet, electricitate deinde excitata appropinquaui fluentis aquae curſui digitum et aqua curſum mutauit, digitumque verſus ſe dirigens diſpergebatur, digito contingente radium aquae, lux coerulea in tenebris obſeruabatur in ſuperficie radii ſine concrepatione.

Experim. XXVI.

Si admonebam laminae ferreae electrificatae 3) baculum ferreum non electrificatum, in diſtantia trium ſaepius pollicum oriebatur lumen absque ſono in extremitate ferri, ferreo baculo ſenſim propius admoto cum luce hac etiam ſibilus vel potius ſuſurrus instar ſuſurri muſcarum audiebatur, in diſtantia trium vel quatuor linearum vero interdum octo ignis concrepans et ſimul index recedere obſeruabatur. Si ergo corpus fulcitur reſina altitudinis quinque vel octo linearum et vndique ſaltem quinque vel octo lineas remotum eſt a corporibus deriuatiuae electricitatis capacibus, non metuendum eſt electricitatis decrementum ſenſibile, quod etiam experientia ipſa me docuit. Quia tamen in diſtantia trium pollicum a lamina ferrea lux oritur corpore electricitatis deriuatiuae valde capaci, e. g. metallo adpropinquato, cauendum eſſe videtur, vt ferrum vel aliud metallum, vel aqua homo etc. a corpore electrificato tres ſaltem digitos diſtet. Hinc conſultius eſſe videtur, ſi reſinae, quae inſeruire debet corporibus electrifi-

can-

candis fulciendis, altitudo trium minimum digitorum concedatur.

Experim. XXVII.

Stante homine in reſina prope pondera 3) iuncto baculo ligneo quatuor pedes longo cum maſſa ferrea 3), electricitate 25. gr. excitata, et digito homini in reſina ſtanti admoto ſcintilla concrepans imbecillis orta eſt indice electricitatis recedente ad gr. 22. reliquus apparatus ergo electrificatus poſſidebat adhuc gr. electricitatis 22. Si lignum tangebatur manu non electrificata lumen absque ſono in tenebris in puncto contactus obſeruabatur ſine ſenſibili indicis receſſione. Si lignum humidum adhibetur, ignis concrepans vehemens tacto homine electrificato oritur et electricitas tota ſubito omni apparatui electrificato aufertur. Lignum hinc ſiccum non eſt aptum electricitati fortiori deriuandae. Idem in funibus ſiccis ex lino et cannabinis, in funibus ſericis coloratis vero maxime obſeruatur.

Experim. XXVIII.

Phiala vitrea cum collo pedem Lond. et dimidium longo, ſi in fulcimento ferreo laminae ferreae 3) ponebatur, et deinde electricitas gr. 25. excitabatur, orificio eius admotum ferrum lumen exhibebat cum ſono quem aqua edit ſi coquitur. Poſt bene exſiccatam phialam neque lumen neque ſtridor obſeruabatur examine iterum inſtituto. In vaſis metallicis anguſti colli idem ſtridor et eadem lux obſeruatur, aſt corpus metallicum 5. vel ſex li-

neas a parietibus vaſis remotum eſſe debet ne ignis concrepans excitetur.

Experim. XXIX.

§. 10. Electrificaui 24. libras Ruſſ. vsque dum index electricitatis oſtenderet gr. 13. et deinde in reſina ſtans, vt minima diſtantia extremitatum pedum a parietibus vaſis lignei eſſet vnius digiti, tetigi filum ferreum deriuans electricitatem et receſſit index ad gr. 9. Deinde manu a filo ferreo remota tetigi corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis et poſtea rurſus tetigi filum ferreum et receſſit index ad gr. 6. remoui vt prius manum a filo ferreo et tetigi rurſus corpus deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis et rurſus adplicaui digitum ad filum ferreum et receſſit index ad gr. 3. hoc continuaui, vsque dum index recederet ad gr. 0. et adplicaret ſe regulae ferreae quod, repetens ſaepius experimentum, quarto tactu eueniebat.

Schol. Corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis eſt mihi corpus deriuatiuae electricitatis fortioris connexum cum aliis deriuatiuae electricitatis capacibus in infinitum.

Experim. XXX.

Quadraginta libris Ruſſ. ſimul reſinae impoſitis repetii experimentum, primo tactu receſſit index a gr. 13. ad gr. 8

2°	5
3°	2
4	1
5	0

Ex-

Experim. XXXI.

Electrificaui 324. libras Ruſſ. donec index iterum oſtenderet gr. 13. ſimilique vt antea ratione procedens, obſeruaui

1 tactu recedere indicem ad gr. 10
2 - - - - - - - - - - 8
3 - - - - - - - - - - 6
4 - - - - - - - - - - $4\frac{1}{2}$
5 - - - - - - - - - - 2
6 - - - - - - - - - - 0

repetii experimentum et receſſit index

1 tactu fili ferrei ad gr. - - - 10
2 - - - - - - - - - - - 8
3 - - - - - - - - - - - 6
4 - - - - - - - - - - - 5
5 - - - - - - - - - - - 1
6 - - - - - - - - - - - 0.
et adhaeſit regulae ferreae

Experim. XXXII.

Quadraginta libris ſimul reſinae impoſitis et eas reſinae inſiſtens tangens

1mo tactu fili ferrei index receſſit ad gr. 9
2 - - - - - - - - - - - 6
3 - - - - - - - - - - - 4
4 - - - - - - - - - - - 2
5 - - - - - - - - - - - 0.

repe-

repetito experimento receſſit index
1 tactu fili ferrei ad gradum 10
2 - - - - - - - - - 7
3 - - - - - - - - - 5
4 - - - - - - - - - 3
5 - - - - - - - - - 2
6 - - - - - - - - - 1
7 - - - - - - - - - 0.

repetito eodem experimento receſſit index
1mo tactu ad gr. - - - - 10
2 - - - - - - - - - - - $7\frac{1}{3}$
3 - - - - - - - - - - - 5
4 - - - - - - - - - - - $3\frac{1}{2}$
5 - - - - - - - - - - - 2
6 - - - - - - - - - - - 1
7 - - - - - - - - - - - 0.

§. 11. Ex his exper. 29. 30. 31. 32. videre eſt.

Maiorem maſſam difficilius eodem corpore adplicato perdere electricitatem minorem maſſam facilius. Quater enim meo corpore adplicato i. e. adplicatis circiter 640. libris maſſa electrificata 24. libr. perdidit electricitatem. Maſſa vero 324. libr. electrificata perdidit electrificatem ſexies adplicato meo corpore i. e. 960. libris circiter.

Vt magis vtilia fiant talia experimenta corpora regularia ſunt adhibenda.

Experim. XXXIII.

§. 12. Si felis in lamina ferrea 3) collocatur et manu tenetur, electricitate producta ſentiuntur ictus doloroſi

et

et pulſus [illegible] [illegible] et [illegible] obſervatur cum inſigni impedimento.

Experim. XXXIV.

Si gallus in lamina ferrea electrificatur admoto extremitatibus pedis eius manu exit ignis ſibilans coeruleus, ſaepius lux dilutior longitudinis duorum ferme digitorum.

Experim. XXXV.

Brachio filo ferreo electrificato admoto ſentitur ictus per veſtimenta, nec index ſtatim recedit, quia veſtimenta ex lana parata non ſunt corpora derivationi electricitatis valde capacia, ſi veſtimenta ſunt ex ſerico et [illegible] index non mutatur ſenſibiliter.

Experim. XXXVI.

Capite crinibus gaudente, nec glabro filo ferreo electrificato admoto ſentiuntur ſimiliter ictus doloroſi.

Schol. In reſina altitudinis trium linearum ſtans et applicans manum ſphaerae electrificatae ut experim. 1. ſenſi ictus ſub planta pedis vix ferendos, hoc vero non ſemper evenit.

Experim. XXXVII.

Spiritum vini in cochleari admoto corpori electrificato ad accendendum, ſcintilla emicante ſenſi ictum doloroſum praeſertim ſi cochleare tenerem inter muccinum ex ſerico. Aliqui aſſeruerunt ſe ſentire ictum conſtrictivum per

 totum

totam palmam; alii per totum brachium. Qui ſpiritum digito accendit eundem ictum vix ſentiendum obſeruat.

Experim. XXXVIII.

Si ſpiritus vel naphta electrificati accendendi ſunt digito non electrificato, idem ſentitur ictus.

Experim. XXXIX.

Si prisma circa tubum vitreum mobile (fig.) adplicatur ad ferrum electrificatum in diſt. duar. lin. et alterum prisma quod digitus contingit, ab illo remotum eſt tres lineas et ſaepius quatuor, et homo tenens prisma electrificatur vt experim. 1. oritur ignis concrepans die viſibilis, propagatus a prismate *c*, et eiaculatus ad prisma *d* et inde ad filum ferreum electrificatum BCDEF.

Experim. XXXX.

Si bilanx electrificatur, poſt filum ferreum (1. 2. 3.) adplicatum circa *n*, pondera non electrificata 3) attrahunt lancem ex diſtantia duorum pollicum, et oritur in lamina ferrea flamma ingens concrepans valde, at ceſſat phaenomenon continuata electrificatione, maſſis ferreis ipſis electricitate imbutis, ſi connectuntur maſſae ferreae cum corpore deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis, continuae attractiones, flammae et concrepationes fiunt.

Experim. XXXXI.

Si pondera ferrea 3) electrificantur filo ferreo (1, 2, 3) ad pondera ferrea adplicato attrahunt lancem et eadem phaenomena exoriuntur: ſed ceſſant etiam phaenomena, niſi bilanx cum corpore deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis connectatur.

Schol. Bilance vſus ſum etiam ad ponderandam vim electricitatis electricitate enim ſumma, quam mea ſphaera excitare potui eleuaui drachmam vnam cum dimidia per duos dig. Lond. ſed de experimentis ipſis impoſterum.

Experim. XXXXII.

§. 14. Si homo electrificatus diſtat ab indice ferme 3. pedes Londinenſes, index electrificatus fugit hominem, ſi homo diſtribuit electricitatem per corpora deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis, index electrificatus accedit ad hominem paululum.

Schol. Ne ergo turbetur index ad hoc phaenomenon attendendum eſt.

Experim. XXXXIII.

Si laminae ferreae 3) tabulam ligneam craſſitiei pollicis imponebam et electricitatem in eam deriuabam lanx etiam attrahebatur ex diſtantia duorum digitorum, ſed lux abſque ſono oriebatur tantum, inſignis tamen ſplen-

 doris,

doris, lanx in contactu manebat cum tabula lignea, et nec ſic quidem ſtatim reliquo apparatui electricitas auferebatur, ſed filum ferreum tactum dedit adhuc lucem cum exiguo ſuſurro.

CLAS-

CLASSIS TERTIA,

CONTINENS

HISTORICA.

DVO NVMI GELENSIVM ILLVSTRATI

a

IOAN. HENRICO SCHVLZIO.

Numus aeneus in muſeo meo. Caput Iouis diademate cinctum. ΓΕΛΩΙΩΝ. = Herculis barbatum caput et exuuiis leoninis tectum. Tab. VII Fig. 1.

Numus aeneus minor, pariter in muſeo meo. Caput Iouis laureatum. ΓΕΛΩΙΩΝ. = Caput Herculis imberbe, leonis exuuiis tectum. Fig. 2.

Venerunt in manus meas duo numi in vrbe Siciliae nominatiſſima Gela ambo percuſſi, ex aere pallidius flaueſcente: quos ob ſingularem elegantiam et integritatem vtique valde aeſtimo. Tanto autem maioris facio binos bona fortuna acceptos: quoniam vterque ad antiqui ſciptoris illuſtrationem, forte etiam emendationem facit: alter autem alterius fidem confirmat. Eſt vterque quidem moduli exigui: verum ita diſcrepant mole, vt maior ex his alterum craſſitie dupla ſuperet: minimus ad denarii Romani ſolitam craſſitiem accedat. Capitum figurae in vtroque tam nitide eminent, tamque eleganti artificio, praecipue in minori, elaboratae ſunt, vt cum praeſtantiſſimis antiquis operis certare de praerogatiua poſſe videantur.

Idem fere eſt vtriusque typus, quem a perito pictore, ſeruata iuſta magnitudine, delineatum exhibeo. Aduerſa facies caput Iouis praefert, in maiori diadematum, in minori apertius laureatum. Alteri ſubſcriptum eſt

ΓΕ-

ΓΕΛΩΙΩΝ: alteri, linea faciei oppoſita, totidem litteris adſcriptum idem nomen. Aduerſa pagina vtrobique ſiſtit Herculis caput, leonis exuuiis obtectum, ſub maxillis in nodum quaſi conſtrictis. Iſtud tamen diſcrepat, quod maior faciem aperte barbatam exhibet: minor autem omnino imberbem, iuuenilem, glabram.

Nihil eſſe ſingulare in capitibus numinum, quae hi nummi oſtendunt, facile largior: neque quidquam habeo, quod de ipſis afferam, noui. Id autem credo nondum eſſe protritum, quod hinc licet diſcere τὸ ἐθνικὸν, ſeu formam adiectiui nominis, quo ciues Gelae ſe ipſos antiquiſſimo aeuo ſignauerunt. Vnquamne aliquis antea ſimiles nummos aeri inciſos dederit aut deſcripſerit, equidem nec certo negare audeo, neque affirmare valeo. Certe apud GOLTZIVM et PROSP. PARISIVM eos non deprehendo: neque IO. HARDVINVS, qui nummos populorum et vrbium ex inſtituto illuſtrauit, eos vel ipſe vidit, vel apud PARVTAM, quem ego fruſtra requiſiui, ille ſe inſpexiſſe teſtatur, inuenit. Vero enim eſt ſimile illum non fuiſſe neglecturum, quod ſuae ſententiae repugnans in ipſis aperte cognouiſſet. Etiam Cl. IO. IAC. GESNERVS in numiſm. Graec. popul. et vrbium, quae nouiſſime prodierunt, nullum adfert, qui noſtris ſit ſimilis: quin nec vnicum habet, in quo nomen gentile inueniatur. Scilicet iam pridem docti viri animaduerterunt, fieri non poſſe, vt integer indicetur locus STEPHANI BYZANTINI, quando in voce ΓΕΛΑ ſic ſcribitur: τὸ ἐθνικὸν ΓΕΛΑΙΟΣ, οὐ Γελῷος. Nam quum tot claſſici auctores Graeci, et inter hos antiquiſſimi, HERODOTVS ac THVCYDIDES illo Γελῷος ſemper vſi ſint; quid

hic

hic grammaticus improbare videtur: pridem adducti ſunt, vt transpoſita verba agnoſcerent, eademque ſic ordinanda: τὸ ἐθνικὸν Γελῶος, ἢ Γελᾷος. Ita ſtatuentibus LVC. HOLSTENIVS non quidem repugnat: ſed aliam tamen et mitiorem medicinam videtur ſuadere, quando vnica ſyllaba mutata ſic legendum exiſtimat: τὸ ἐθνικὸν Γελᾷος, ϗ [vel ἢ] Γελῶος.

Fateor mihi valde arridere hanc ſententiam doctiſſimi viri: quippe cui ſequentia optime quadrant. Subiicit enim ὡς Ἄβρων ϗ ἡ συνήθεια. Quibus innuit ſibi non eſſe ignotum, quod Abronis auctoritate, atque vſu tyranno, nitatur illa denominatio, qua ciues huius vrbis Geloi ſolent appellari. Mirum autem videri poſſit, quid in mentem venerit Stephano, cur Γελᾷος, quod forte in nullo ſuperſtite monumento legitur, quam Γελῶος, maluerit formare gentile nomen. Forte incolae vrbis Gelae poſterioribus temporibus auerſari coeperunt τὸ Γελῶος aut Γελώïος, quod *ridiculum* denotat: ſibique potius aptauerunt nomen gentile Γελᾷος, cui nihil ambigui ſenſus ſubeſt. Sic Hallenſes noſtri, quando vernaculo ſermone ſcribunt, non facile adhibent adiectiuum **hälliſch**, ſed ſatis conſtanter ponunt **halliſch**: quamquam illud prius vicinorum plurimis vulgatiſſimo vſu tritum eſt; cui maleuoli quidam, diphthongo leuiter mutata, odioſam ſignificationem ſubiiciunt.

Id ſuſpicantibus non leui adiumento eſt CICERO, rerum Siciliae, ſi quisquam alius, probe gnarus, quippe, cum quaſtor eſſet, in ea verſatus: eiusdemque prouinciae in accuſatione C. Verris patronus. Hic abſtinet ſe a Geloorum nomine, et, quoties eo vtendum fuiſſet, potius

Gelenſes vocat. Enimuero quicquid ab hoc praeſidii ſperatur, eripere videtur DIODORVS SICVLVS, rerum patriae ſuae non minus gnarus, apud quem ſemper Geloos inuenimus. PLINIVS Gelanos appellat: ſi non omnino Gelaeos ſcripſit, et librariorum vitio N pro E ſurrepſit.

Fatendum tamen eſt, fuiſſe omnino tempus, quo haec ciuitas non refugiebat gentile Geloorum nomen, ab euentu ſiue fabuloſo, ſi BOCHARTO credimus, ſiue vero, quondam impoſitum: ſed propriis monumentis ſuis inſcripſit ad omnem poſteritatem propagandum. FAZELLVS, quem in notis ad Stephanum video laudatum, citat numismata cum oppidanorum inſcriptione ΓΕΛΩΩΝ. Si recte et acute videt, oportet illos eſſe a noſtris diuerſos, in quibus perſpicue legitur ΓΕΛΩΙΩΝ. Quamquam fatendum eſt, eodem rem redire, ſiue prius Ω nudum exſtet, ſiue iota ei ſubiungatur, ſiue ſubſcribatur. Eſt enim hic grammaticorum diſſenſus; quorum aliis hoc, illud aliis videtur: quem qui noſcere cupit, adeat ETYMOLOGVM, EVSTATHIVM, THEOD. GAZAM, alios, qui ipſum opinionibus ſuis explebunt inque partes trahent. Antiquius puto ΓΕΛΩΙΩΝ; et antiqui moris crebra ſunt exempla, vt πατρώιος, ἡρώιος, ὀλοφώιος, pluraque eiusdem generis, poetis praecipue familiaria.

Oportet autem antiquiſſimos eſſe hos numos et bis mille annorum aetatem forte ſatis longe ſuperare. Docent enim vetuſtiſſima monumenta Gelam ſui iuris eſſe pridem deſiiſſe, quum Gelonem, tyrannum potentiſſimum, iam varios dominos antea experta, acciperet: hoc autem Syracuſis iam potito, Hieroni, fratri eius, tradita fuerit. Vero autem ſimile, et exemplis multis conſentaneum eſt,

numis,

numis, qui a ciuitatibus ſub vnius imperium redactis cuſi fuerunt, nomina principum fuiſſe ſola inſcripta, aut vna cum populi mentione.

Sic apud GOLZIVM *tab. XI.* proſtant duo, in quibus praeter ΓΕΛΑΣ nihil legitur: hisque Hieronis et Gelae mentionem facientes ſex ſubiunguntur: cum ſolo autem Hieronis nomine *tabula XIII.* quatuor viſuntur. Puto autem illos omnes, in quibus tantum ΓΕΛΑΣ, ΓΕΛΩΙΩΝ aut ΓΕΛΩΩΝ mentio fit, ante Gelonis Hieronisue imperium fuiſſe procuſos. Quum vero ante Salaminiam pugnam Gelo iam Syracuſis potitus eſſet: illa autem tam celebris pugna, ex PETAVII calculo, ante initium aerae Chriſtianae annis CCCCLXXX. acciderit; erunt ex hac hypotheſi certiſſime maiores aetate XXII. ſaeculorum. Incertum autem relinquo, quantum vltra id tempus excurrant: quum ante Gelonem iam commemorentur tyranni Gelenſium.

Vnquamne poſtea plenam libertatem, cum priſtino flore, recuperauerit Gela; haud expeditum eſt dicere. Inuenio ſane Gelenſes aliquid virium exſeruiſſe Agathoclis temporibus, Athenienſium ope ſubnixos. Videtur autem hic tyrannus omnium grauiſſime Gelam deieciſſe, eamque deinceps ſub Poenis numquam conualuiſſe. Horum autem rebus primo ſtatim bello Punico tantum attritis, vt Siciliam Romanis permittere deberent: non eſt vero ſimile ab illo tempore numos ibi fuiſſe conflatos. Vnde ſi minimam aetatem computemus, duo annorum millia iam effluxerunt ad noſtra tempora.

Sub Romanis vero Gela numquam magnopere fulſit. STRABO miſeram eius conditionem deſcribit. ὄυτε γὰρ

 Ἱμέραν

Ἱμέραν ἔτι συνοικουμένην ἴσμεν, οὔτε Γέλαν. Subiit ſcilicet ſortem plurium in eadem inſula olim florentiſſimarum vrbium, quae pleraeque tunc erant paſtorum domicilia; quum montes et campeſtres regiones equorum boumque greges paſcentibus Romani tradidiſſent.

Mirum quam inique Siculorum, olim tam potentium, rebus conſuluerunt: vnde numi coloniarum et vrbium, in Auguſtorum honorem cuſi, de Siculis minimum trahunt, et, ſi recte memini, vna tantum Panormus in illa ſerie, nec frequens, conſpicitur. Quod tanto magis admirandum videtur, ſi Hiſpaniarum, Aſiae, Aegypti, Thraciae, Moeſiae, Ponti, aliarumque remotiſſimarum vrbium ſortem feliciorem cogitamus: quarum multae tam obſcurae ſunt et hiſtoricorum monumentis praeteritae, vt numquam in orbe fuiſſe noſcerentur, niſi vilibus metallis Auguſtorum vultus et nomina, vna cum ſuis nominibus et inſignioribus fatis, commiſiſſent; quae memoriam earum quotidie renouant et ad omnem, quae litteras amatura et cultura eſt, poſteritatem propagant.

NVMI

NVMI TRAIANI ET IVSTINIANI AVGG. QVIBVS BARBATI EXHIBENTVR

I. H. Schulze.

Numus aereus in muſeo meo. Caput laureatum et barbatum. IMP. CAES. TRAIAN. AVG. GERM. = Verres vitta redimitus. S. C. Tab. VII. Fig. 3.

Numus aereus in muſeo meo. Caput, cum parte pectoris, diademate ornatum et barbatum. DN. IVSTINIANVS P. P AVG. = In area M, ad cuius vtrumque crus ſtella, ſupra crux, infra CON. Fig. 4.

Ante quatuor annos, cum aliis valde mihi gratis numis, ex Dacia ad me miſſus fuit hic, quem produco, Traianus exigui moduli, qui faciem optimi principis barbatam exhibet, cum hac epigraphe: IMPerator CAESar TRAIANus AVGuſtus GERManicus. Auerſa pagina nihil habet praeter verrem vitta redimitum, et litteras S. C. Integerrimus eſt et aerugine fuſca obtectus, genuinus.

Limis, fateor, oculis adſpiciebam inſolitam faciem, diuque inter reiiculos iacentem relinquebam, donec accedebat Iuſtinianus barbatus, qui me initio etiam ancipitem tenebat, Auguſtumne ſalutarem, an laruatum et reprobum abiicerem. Impellebat me haec aeſtuatio, vt de barbis Romanorum accuratius diſpicerem, et tam per hiſtoricorum volumina lucem requirerem, quam praecipue ex numorum inconcuſſa fide certam aliquam rationem eliceerem, qua diiudicari haec aes debeat.

Nec fructu caruit impenſus huic diſquiſitioni labor: quin potius illud nunc certum teneo, non eſſe repudian-

dos eos nummos, qui Auguſtos alioſque illuſtres viros, quos frequentiſſime imberbes adſpicimus, cum barba ſpectandos offerunt: verum potius illos, ſi cetera antiquitatis et genuinitatis ſigna addicant, inter pretioſiores eſſe reponendos: quum nulli ſine graui ratione procuſi ſint: quam vbique reperiremus, ſi illorum temporum hiſtoriae pleniores ad nos perueniſſent; quemadmodum in aliquibus dare licet omnino irrefragabilem.

Dabo dictorum probationem et illuſtrationem, quae ſufficere poſſit: deinde ad propoſitum Traiani nummum progrediar. Nemo dubitat, quin Auguſti aeuo Romani barbas ſibi radendas curauerint. Quod vero laudatus princeps ab hoc more non alienus fuerit, inſuper certos nos reddit PLINIVS, qui *lib. VII. cap. 59.* ſcribit: *primus omnium radi quotidie inſtituit Africanus: ſequens diuus Auguſtus cultris ſemper vſus eſt.* Fuiſſe tamen dies, immo continuos menſes, quibus cultris non vteretur, teſtem luculentum habemus SVETONIVM in *Auguſt. cap.* XXIII. quando ita clade Variana conſternatum eum ſcribit, vt per continuos menſes barbam capillumque ſubmitteret. Apparet vna cauſſa, magnus luctus, quo detenti in ſqualore manebant.

At, inquis, probandum eſt, quod luctus ſignificatio vsque ad publica monumenta manauerit. Equidem non ſubterfugio illam probationem, ſi mihi concedatur exemplis aliis, quam quae in hanc cladem congruant, eam praeſtare. Vero enim ſimile eſt, non voluiſſe aut principem memoriam huius calamitatis aeternam reddere, aut ſenatum vulnera rei publicae tanta propalare. Dabo itaque Auguſtum vna cum Lepido et Antonio, collegis triumviris

viris rei. publicae conſtituendae, huius moris teſtes, vt ſpero, idoneos. Inſpiciamus apud FVLV. VRSINVM Antoniae familiae tabulam VI. offerentque ſe nobis *num.* 5. Auguſtus, et *num.* 6. Antonius barbati. Si quaerimus cauſſam: ea quidem manifeſta eſt inſpicientibus priorem nummum, cuius aduerſae parti CAESAR IMP. adſcribitur, auerſa autem caduceum alatum pingit, cui ſubſcribitur ANTONIVS IMP. Iam vero neſcio aliud in hiſtoria tempus inuenire, cui conciliatae inter Antonium et Auguſtum pacis, luctusque communis notae quadrent, praeter illud, quo Antonius Fuluiam coniugem extillerat, quam ſocrum quondam Auguſtus habuerat: vt decori ratio ſigna luctus publica ab ipſo requireret. Quod autem ſtatim ab eius diſceſſu pax inter ambo coaluerit, teſtibus DIONE CASSIO et PLVTARCHO conſtat. Sed et Lepidum barbatum videas apud eundem VRSINVM familiae Aemiliae *tab.* III. *num.* 2. et Vibiae *tab.* I. *num.* 1. quos nummos docti viri ad Antonium ſuam Fuluiam lugentem et concordiam reparatam pridem traxerunt. Quae vero alia neceſſitudo inter Lepidum ac Antonium, praeter collegii ſocietatem, fuerit, iam non ſuccurrit, neque vacat requirere.

Aliud exemplum Auguſti conſpicue barbati dat laudatus auctor, quod in Iuliae, familiae *Tab.* VII. ſexto loco conſpicitur, habetque adſcriptam temporis notam: COS. ITER. ET TER. DESIG. Conueniunt haec in A. V. DCCXX. cui in faſtis adſcribitur: SEX. POMPEIVS MAGN. F. CN. N. MAGNVS IN INSEQ. ANNVM DESIGN. ERAT ANTEQVAM INIRET HOSTIS IVDICATVS OCCISVS E. IN EIVS LOCVM F.

EST

EST *L.* VOLCATIVS L. F. TVLLVS. Hunc itaque Sextum ſi lugere occiſum, quod hoſtis fuerat, non debuit, putauit tamen lugendum, quod, teſte SVETONIO, a matre Magnum Pompeium arctiſſimo contingebat gradu. Scilicet tunc iam in more fuit poſitum, vt principes etiam illorum mortem lugere ſe ſignificent, quibuscum bella gerunt.

Sed non vnica barbam alendi cauſa luctus fuiſſe videtur apud Romanos. Docet enim PLVTARCHVS, etiam in bello, ſi non omnes, certe aliquos eam aluiſſe, quo magis viriles viderentur. Cognoſcet hoc, quisquis leget ipſum de Antonio referentem, qualem ſe iuuenis praeſtiterit, quum Gabinium proconſulem in Syriam et Aegyptum comitaretur, eiusque auſpiciis praeclara multa gereret. Inter alia commemorat, quod fuerit ipſi πώγων τις οὐκ ἀγεννὴς, *barba non ignobilis*; quod Dacerius vertit: *la barbe fort epaiſſe*, et ante ipſum Amyotus reddiderat: *la barbe forte et eſpeſſe.* Hanc eum etiam reliquo tempore, quoties in caſtris degebat, aluiſſe, eodem auctore colligo: quia ad Mutinam ab Caeſare Auguſto victus, inque celerem fugam coniectus, Lepidi caſtra, perfugium ibi quaerens, acceſſit, miſerationemque militibus mouit coma inculta et barba prolixa, quam mox ab infelici praelio coeperat promittere. Significanter dicitur βαθὺς πώγων, μετὰ τὴν ἧτταν εὐθὺς καθειμένος. Sed prolixam barbam paucis diebus nemo producit, cui non antea eſt mediocris, quam forfice detondendo aut praecidendo intra limites decori continet: de quo memini HADR. IVNIVM copioſius diſputare.

Iam

Iam vt propius ad Traiani numum accedamus, caret ille quidem indubia temporis nota: quum nec conſulatus nec tribuniciae poteſtatis numerum adſcriptum habeat: ſed ipſum illud, quod non alio quam Germanici titulo fulget, argumento eſt, eum inter initia imperii eſſe cuſum, ante acceptum patris patriae honorem. Eodemque relatum hunc numum video a Comite MEDIOBARBO, qui ipſum indicat *pag.* 148. ſimulque refert, alium ei ſimilem exſtare, qui in auerſa parte clauam Herculis ſiſtat.

Credo autem plures omnino procuſos exſtare Traianos, quibus nomen non adſcriptum eſt: vnde ad alios Auguſtos fuere relati. Iudicem hic faciam beneuolum lectorem, an multum a veri ſimilitudine abſit, quod dicturus ſum. Vir quondam illuſtris et numariae rei peritiſſimus PETRVS SEGVINVS in *ſelect. numiſm. pag.* 47. primus refert iconem aurei didrachmi, cui tamen ſimillimum etiam aereum ſe in Italia olim vidiſſe indicat. Eius vna parte videtur caput laureatum et barbatum, nullo adiecto nomine; quod Sept. Seueri eſſe nihil dubitat Seguinus: altera regis caput diadematum viſitur, cum litteris ΒΑCΙΛΕΩC CΑΥΡΟΜΑΤΟΥ. Subiungit vir praeſtantiſſimus, apud illuſtrem LAMONIVM a ſe conſpectum itidem aureum fuiſſe numum, in cuius altero latere facies Traiani ſine inſcriptione quidem, ſed cognitu facillimum, fulſerit: alterum autem regis Sauromatae caput et nomen praetulerit.

Eosdem numos ex theſauro regis Galliae, in quem peruenerunt, delineatos dedit MORELLVS *ſpecim. rei numm. antiq. tab. VII.* vbi caput imperatoris, quod in Seguiniano eſt, tam exacte refert Sept. Seuerum, vt vix

 poſſit

poſſit aliquid dari ſimilius. Tanto autem magis recedit ab delineatione Seguiniana: prorſus vt ſuſpicionem moueat, optimum virum intempeſtiua philocalia veritati aliquid detraxiſſe, vt indulgeret receptae opinioni. Eiusdem ſtudio debemus ectypum alterius aurei numismatis Lamoniani, in quo caput Traiani cognitu facillimum Seguinus ſcribit, cum notis numeralibus H Υ a Seguino praetermiſſis.

Sed numum Seguinianum ſe vidiſſe teſtatur perilluſtris EZ. SPANHEMIVS *de praeſt. et vſu numism. diſſert. V*. Digna ſunt, quae attente conſiderentur, eius verba: „Regem Sauromaten eruere mihi liceat ex inſigni numo „aureo, quem videre licuit haud ita pridem in illuſtri mu„ſeo humaniſſimi reique antiquariae peritiſſimi Seguini. „Numus eſt, qui hinc Seueri Aug. caput exhibet cum „ſtella, ac BARBARIS QVIBVSDAM LITTERIS: il„linc autem caput barbatum, cum diademate ac inſcripti„one ΒΑCΙΛΕΩC CΑΥΡΟΜΑΤΟΥ. De hoc autem „Sauromate magnum apud auctores in rebus Seueri ſilen„tium.

Apparet hinc, Spanhemium αὐτόπτην litteras iſti capiti, quod Seuerum referre cum Seguino putabat, ſubiectas, barbaras agnouiſſe, id eſt tales, vnde non poſſet eruere vllum ſignificatum. Sed id diſſimulauit Seguinus, ſatisque diſtinctas et cognitu faciles notas exhibuit Δ Ϙ V. quas valere CCCXCIV. manifeſto quidem errore typographico, pro CCCCXCIV. ſubiicitur.

Seguinum ſequutus IO. HARDVINVS in *biſtor. Auguſt. p. m.* 799. numum hunc aſſignat anno Seueri quarto: aeraeque Ponti Paphlagonici regum initia reiicit ad A. V. CCCCLVI. Quod ſi ſatis firmum eſt, omni-

noque

noque Seuerus in illo numo ſignatus fuit: non poſſunt vtique ſollicitari illae numerorum notae. Vereor autem magnopere ne potius illatae ſint, quam ex numo Seguiniano erutae.

Ab Harduino non multum diuerſus eſt IOAN. VAILLANTIVS in notis et obſeruationibus ad Petr. Seguini ſelecta numismata *pag*. 396. vbi Boſpori ſeu Sarmatiae regum aeram ab anno V. C. CCCCLIII. orditur. Atque ex huius calculo ille, qui cum Seueri capite iungi creditur, ad A. V. C. DCCCCXLVII. erit referendus. Enimuero in medio hanc omnem de iſta aera quaeſtionem relinquo poſitam: illud autem puto non temere me monere, quod Sauromates iſte, qui Seuero coaeuus ex fide Seguiniani numi creditur, duplici iure ſuſpectus eſſe debeat: quod et Traiani barbati ac Seueri magna ſimilitudo eſt, praeſertim ſi quis in numo non optime elaborato aliquid rudiori et barbarae fabricae condonet: et quod numeri, quos Seguinus dedit, omnesque ſecuti ſunt, non iniuria, vt quidem ſpero, in dubium reuocari poſſunt. Tantoque ſecurius puto inhaereri hic Traiano, cuius temporibus Sauromaten vixiſſe PLINIVS teſtatur; quum illius imago, atque in altera facie Sauromates rex, in numo Lamoniano, cum litteris H Υ clare exſtet; atque eius ſucceſſor etiam Hadrianus cum eodem viſatur apud HAYMIVM *theſ. Britann. part. II. pag*. 53. cum numeris ΓΙΥ: ſed Sauromatae, qui cum Seuero vixerit, nec vola exſtet nec veſtigium, ſi ab numo Seguiniano, admodum multis dubiis ſubiacente, diſceſſeris.

Cur in altera numi huius pagina verres exſtet, isque vitta exornatus, vix aliam rationem dare poſſumus, quam quod ſacrificium aliquod ſolemne denotetur. Forte exercitus

ercitus luſtrationem intelligere debemus: ad quam peragendam verrem fuiſſe ſacrificatum ex ipſa columna Traiani hodieque ſuperſtite probat STVCKIVS *ſacr. et ſacrific. gentilium deſcript. p. m. 66.* Quoniam autem in illo ſacro bos etiam immolandus erat, qui hic non ſignatus eſt; videndum erit annon iuſtius de foedere quodam icto hic cogitetur. Quid ſi innuat cum rege Sauromate initum, cuius opera ad bellum cum Dacis ſuſcipiendum vſi Romani videri poſſunt. Vero haec ſimilia exiſtimo: ſed certiſſime nemo aliquid de his dixerit, ob auctorum hiſtoriae romanae deficiens ſuffragium.

Subiicio pauca de Iuſtiniano barbato. Debeo praeſtantiſſimum numum, omnibus genuinae bonitatis characteribus praeditum, humanitati illuſtris academiae Fridericianae Senioris et academiae Imperialis Petriburgenſis ſocii FRIDERICI HOFMANNI, qui etiam amborum Gelenſium, quos modo produxi, me poſſeſſorem voluit, vt ad publici boni emolumentum eos protraherem.

Multae ſane proſtant icones numiſmatum auguſtali vultu diui Iuſtiniani ornatorum: vt videri poteſt in tabulis vitae huius imperatoris a magnifico academiae Fridericianae Cancellario IO. PETR. de LVDWIG deſcriptae magno numero adiectis. Res autem ipſa loquitur, quam ſint infrequentes icones barbatae, et quam pauciſſimae inter has barbae veſtigium in mento offerant. In noſtro omnia ſenem produnt: vnde videant eruditi, annon rectiſſime coniici poſſit, apparere hic Iuſtinianum, qualis fuit, quum iam LXVII. annorum aetatem adeptus morte ereptam ſibi Theodoram Auguſtam lugeret. Monogramma auerſae partis non moror, quum ſit frequentiſſimum,

et

et multorum coniecturis tentatum, quibus certiora dare non poſſum.

Quum haec ſcripſiſſem, perueniunt ad me ampla volumina, quibus PAVL. PEDRVSIVS muſei Farneſiani diuitias expoſuit. Dum ceteris tantiſper ſepoſitis tomum ſecundum, argenteis vsque ad Traianum, hoc eſt ad finem aeui imberbis, auide perluſtro, inuenio *tab. IV.* duos Auguſtos barbatos, qui in ea tertium et quartum locum occupant. Mihi vtique omnium primi hi videntur, qui in Octauii Auguſti honorem vmquam fuere cuſi: aut ſi non primi ſunt, repraeſentare ipſum ad magnas res gerendas tunc primum accedentem. Caput nudum eſt, cui in altero nihil, in altero autem C. CAES. IMP. adſcriptum. In huius aduerſa eſt equo ſtanti inſidens perſona, cuius veſtimenta non ſunt clariſſime expreſſa, cum litteris S. C. In alterius poſtica pagina eſt perſona equo inſidens ad curſum incitato. Subſcriptum eſt POPVL. IVSSV. Significari autem hiſce typis ſtatuas ipſi poſitas ex Vell. Paterculo bene docet doctus commentator. Eam autem rem decretam fuiſſe non poſt longum a Iulio interemto tempus, clariſſime edocet SVETONIVS. Vnde Oct. Caeſarem, quem Auguſtum poſtea vocauerunt, patrem adhuc inultum luxiſſe clariſſime intelligitur.

Progreſſus hinc ad tomum quintum, tabula eius V. binos maximi moduli numos Domitianum exhibentes inveni conſpicue barbatos, quorum alter conſulatu VII. alter XV. ſignatus eſt. Quod ad priorem pertinet, videtur is inter initia ad ſe delati imperii, poſt obitum TITI fratris, percuſſus: adeoque ſqualori et luctui, in quo tunc fuit, attribuenda barba fuerit. Poſteriorem vero annum

inter laeta et honorifica, quantum conſtat, totum conſumſit: nulla vt cogitari aut indicari poſſit vel publica vel priuata calamitas, quae luctus ſigna requireret.

Forte DIO CASSIVS, qui Hadrianum Auguſtum primum fuiſſe docet, cui barbam nutrire viſum ſit, nimiam apud aliquos venerationem et fidem ſuo hoc adſerto meruit. Vere enim video aliquos, qui Hadrianum numquam non barbatum exhibent: quum me vſus docuerit, vix viceſimum quemque Hadriani numum vere barbatum obtingere. Annon iuſta ſit ſuſpicio, quod in imperatoribus ipſum praegreſſis barbam obuiam ſaepe neglexerint, qui numismata delinearunt aut delineanda dederunt; vel inter ſuſpectos et apocryphos repoſuerint tales; decidendum illis relinquo, qui rem numiſmaticam non ex elegantibus tabulis tractare ſatis ducunt, ſed ipſos comparare ac tractare numos adſueuerunt.

GALE-

GALERIAE VALERIAE AVG.
NVMI ILLVSTRATI.
a
I. H. *Schulze*.

Numus aeneus in muſeo meo. Caput Auguſtae capillis ita comtis, vt ad ſimilitudinem exuuiarum leonis accedere videatur, a temporibus ſurgente ornamento, lauri foliis ſimili. GAL. VALERIA AVG. Tab. VII. Fig. 5.

= Figura feminina ſtans dextra pomum, ſiniſtra ſtolam eleuat: hinc ſtella, illinc luna. VENERI VICTRICI. Sub pedibus litterarum detritarum euanida veſtigia.

Numus itidem aeneus ex muſeo meo. Caput Auguſtae ad pectus cum ſtola: capillis in modum galeae compoſitis. GAL. VALERIA AVG. Fig. 6.

= Figura ſtolata ſtans, vt in praecedenti. Eadem epigraphe. a dextris in area ſtella, a ſiniſtris Γ. Sub pedibus ſunt litterae SM. TS.

Obiter adducitur.

Numus aeneus muſei mei, exigui moduli. Caput Auguſtae cum parte pectoris. Capillus in modum exuuiarum leonis comtus, cinctus monili baccato. FL. HELENA AVGVSTA. Fig. 7.

= Femina ſtans ſtolata dextra ramum. SECVRITAS REIPVBLICE. Sub pedibus litterae B S intermedio ſerto.

Si ampliſſime patentem antiquitatum doctrinam magno oceano comparare licet: ſyrtibus vadoſisque locis conferre debe-

debemus illam ex eius ambitu partem, quae de re veſtiaria, deque ceteris ad cultum et ornatum corporis pertinentibus, ſolet praecipere. Nam quum talia lege nulla, niſi in ſacro ordini adſcriptis, continerentur: factum eſſe obſeruamus, vt labentibus annis multa paulatim immutarentur: aliquando autem, ſi principes exemplum praeirent, ſubita conuerſione anno vertente placerent, quae ineunte nemini in mentem forte venerant.

Fit inde, vt quisquis de his velit praecepta tradere, niſi ſeipſum certo alicui et determinato tempori adſtringat, neceſſario debeat impingere et lectorem ſuum male confundere. Non dicam nunc de aliis; ſed quia modo de barba attigi aliqua, de capillitio et coma paucula ſubiungam. Neque tamen nunc virorum in hoc genere morem tantopere reſpiciendum duco; etſi de hoc argumento plura ſuppetunt: ſed de matronis potiſſimum diſpiciam.

Si quis velit inde ab Auguſti exceſſu, quo primum mulieres ſignari in numis coeperunt, vsque ad Iuſtiniani M. initia, quod tempus quingentos annos exiguo exceſſu ſuperat, comparare Auguſtarum in numis ſuperſtitum capita: mirabitur vtique, comae cultum non ſolum in plerisque diuerſum, ſed nec in vna eademque Auguſta ita perpetuum, vt non notabiles differentiae intercedant. Illas autem a ſculptorum arbitrio ſemper prouenniſſe, vix mihi perſuadere poſſum; etſi magno et in his litteris ſumma cum laude verſato viro placuiſſe intelligo, „moueri nos „non debere, quod varia ſunt interdum capitis tegumen„ta: haec enim non aetatis eſſe ſed officinarum diſcrimina.

Exemplo autem eſto Galeria Valeria Auguſta, cuius nomine inſcriptos binos numos aereos, ad genuina archetypa diligen-

diligenter deſignatos, exhibemus. Numiſmatum his nominibus inſcriptorum indicem dat celeberrimus ANSELMVS BANDVRIVS in *numiſmat. imp. Rom. tom. II. p.* 146. ibidemque aeri inciſum vnum exhibet. Ante ipſum ſingulos typos dederunt BEGERVS *theſ. Brandenb. Vol. II. p.* 790. MEDIOBARBVS *p.* 444. et PATINVS *imp. Rom. numism. ex aere p.* Albine proſtent alii, mihi non exploratum eſt: certe in ſupellectile libraria, quae ad manus eſt, nullum inuenio.

Iam vero inſignis exoritur dubitatio, quum GALERIAE VALERIAE binae Auguſtae eodem fere tempore vixerint, vtri earum hi numi debeant tribui: et, ſi vtraque ſignata fuit, quibus notis dignoſcere eas liceat, vt ſuum cuique vultum, ſuumque monumentum adſignemus. Scilicet vnam M. Aur. Val. Maximiano, quem Herculeum vocant, coniugem fuiſſe ſcribunt Comes Mediobarbus et illuſtris Abbas Bandurius, qui ſimul addit, fuiſſe eandem matrem Maxentii, qui poſtea Auguſtus fuit, et Fauſtae, quae Conſtantino coniux obtigit. Patriam ei Syriam omnes adiungunt. Quumque is Auguſtus, quo marito vſa illa eſt, imperium annis fere viginti tenuerit; cur in tanta aeris ſuo nomine ſignati copia vxorem non etiam curauerit ſignandam? Porro etiam, quum is Auguſtus in Gallia et Germania potiſſimum res geſſerit; vero vtique ſimile eſt, illos, ſi quos in memoriam Galeriae Valeriae ſuae cudendos curauit, facilius potuiſſe in his tractibus ſupereſſe, quam alterius, de qua mox dicemus.

Sed altera Galeria Valeria, quae Diocletiani Auguſti filia et coniux Galerii Valerii Maximiani fuit, auctoris libelli de mortibus perſecutorum elogio cognita, conſequuta eſt

vt ipſi omnes illi numi cum Latina epigraphe et Veneris victricis typo tribuerentur. Haec cum marito Caeſare per XIII. annos vixit: quibus eam Auguſtae titulo vſam fuiſſe, quum coniux Caeſaris appellatione contentus eſſet, vero ſimile non videtur. Quibus autem ſex annis ille Auguſtus fuit, in orientalibus prouinciis verſatum ipſum maxime inuenimus: vnde non ſine iuſta ratione exiſtimamus, non niſi paucos ad nos penetrare potuiſſe numos Auguſtae huius, ſi quos omnino procudendos in honorem eius Auguſtus curauerit.

Si mihi venia detur liberrime, quod ſentio, expromendi, fateor, mihi ob modo dictas rationes probabile videri, quod hi omnes numi potius ad illam Galeriam Valeriam, quae Herculei coniux fuit, referendi ſint, quam ad alteram, quae Diocletiani Auguſti erat filia. Vt vero id tanto confidentius faciam, ſuppetit ratio ſingularis, quam ea conditione ediſſeram, vt lectoris, antiquitatum et hiſtoriarum periti, iudicio permiſſa ſit.

Quantopere is Maximianus, qui Diocletiani collega fuit, Herculem aemulatus ſit, vel agnomen Herculei docet: magis autem confirmant tot numiſmata, in quibus HERCVLES CONSERVATOR, INVICTVS, PACIFER, VICTOR celebratur, vel virtus Auguſti Herculis variis laboribus occupati typo adumbratur. Quae quum ita ſint, quis non vero putet ſimillimum, in illa aula, quae principem habebat praeter reliquos deos Herculi addictiſſimum, plura fuiſſe ſic comparata, vt Herculeum quid redolerent. Non itaque mirandum eſt, ſi ſeruitia Auguſti Auguſtaeue cogitationes eo contenderunt, vt ea, quae ad cultum corporis eorum efficere debebant, proxime ad Hercu-

Herculem prodendum accederent. Comtricum igitur ingenio inuenta et perfecta eſt illa comam implicandi frangendique ratio, vt ſuper frontem nares leoninae prominere viderentur, pendulique cincinnuli dentes mentirentur.

Atque haec puto ita clare in altero numo, qui primum locum occupat, conſpici, vt nulli poſſit ſupereſſe dubium. Parco autem operae conquirendi priſca vocabula, quibus iſtiusmodi ornatum, omnesque eius partes, deſignauerint: ingenue enim fateor, me nondum inueniſſe auctorem vel Graecum vel Romanum, qui me haec doceret. Nam quae antiquiores de comae capillorumue cultu paſſim diſſeruerunt, quaeque de ſuggeſtu, tutulo, aliisque dixerunt, non videntur ſecure huc trahi poſſe; quum non niſi inter huius aeui Auguſtas id ſtudium comam ad ſimilitudinem Herculei capitis concinnandi fuerit: neque exemplum eiusdem poſt huius generationis tempora deinceps obtingat.

In eodem primo numo conſpicue aſſurgit aliquis apex ab auris regione emergens: quem identidem accurate conſiderans, ad foliorum lauri ſimilitudinem accedere cognoſco: cum eo tamen, vt mihi videar in eis animaduertere quaedam puncta; quae dubito an lauri flores fructusue debeam dicere, an gemmas, laminae cuidam in ſimilitudinem foliorum lauri elaboratae, inſertas.

Non multum diſſimile ingenium eſt, vt mihi quidem videtur, in illa capilli concinnatione, qua Flauiam Helenam Auguſtam in adiecto numulo comtam videmus. Quae diuerſa ſunt, oculus facilius arbitrabitur, quam calamus ad deſcribendum valebit. Illud puto manifeſtum eſſe, quod haec Auguſta baccatum monile circa temporum regionem oſtendat, ſed comae tam apte innexum, vt ta- Tab. fig.

men eluceat. In quo maxime differt ab ornatu Galeriae Valeriae, quae monile in altum ſurrectum et ample exſtans oſtentat.

Tab. fig. Sed alter Galeriae Valeriae Auguſtae, quem pariter accuratiſſime delineatum damus, numus, nihil omnino ſiſtit, quod ad Herculeum ornatum referre poſſis: etſi fortitudinis aliquam denotationem habet manifeſta galeae ſimilitudo. Etiam hic exſurgens ab auris regione aliquis apex conſpicitur, ſed oculus, etiam vitris adiutus, nihil diſtincte potuit in eo cognoſcere.

Auerſum vtriusque numi latus in eo, quod rei ſummam efficit, conſpirat. Scilicet ſiſtit Venerem victricem. Stat dea ſtolata, dextraque pomum praefert, ſiniſtra ſtolae fluentem partem eleuat. Quid ſibi velint in area alterius, hinc ſtella, illinc luna creſcens; in alterius autem hinc ſtella illinc Γ: et vtrum officinarum tantum notae ſint, an aliquid altiori indagine requirendum includant, non audeo determinare. Litterae pedibus deae ſubiectae in altero non ſatis patent: in altero omnino conſpicuae ſunt S. M. T S. Ex Harduini interpretandi regula exponi debent: SOCIETAS MERCATORVM TREVERENSIS SECVNDA. In medio haec poſita relinquo: illud tamen moneo, punctum inter ſecundam et tertiam litteram conſpicue exſtare in archetypo.

Non vtique rara eſt in numis Romanis VENVS VICTRIX; ſed vt typo diuerſa proſtat, ſic ratio eam ſignandi varia et diuerſa diuerſis principibus fuit. Omnes nouimus, quam ſaepe eam vel ſtantem vel ſedentem inueniamus in iis, quos ad Iulii Caeſaris honorem Aemilius Buca, Sepullius Macer, C. Maridianus, alii, cudendos

dos procurauerunt. Omnes autem conſentiunt in eo, quod principi huic hoc maxime argumento antiquitatem et nobilitatem ſuae gentis oſtendere placuerit, quippe ab Aenea per Venerem et Julum deductae, Atque in his dea haſtam, maieſtatis ſuae indicium, plerumque tenet, dextra autem victoriam ſertum ligantem praefert. Victoriam non ſolum ab orbis terrarum maxima parte per Romanos reportatam illa praedicat: verum maximam illam Iulii Caeſaris, qua orbis totius victorem populum in Cn. Pompeio vicerat, imperiumque ſub dictatoris perpetui nomine adminiſtrabat. Id vero potiſſimum comitate et conſiliis mitioribus, quibus omnium ordinum beneuolentiam ſibi compararet et conſeruaret, ſecurum reddere ſe cupere, Veneris ſymbolo ſignificare voluiſſe merito videtur.

Quando autem Venus victrix in Auguſtarum numis exhibetur, commendare hoc ſymbolum videtur non ſolum venuſtatem earum, qua ſibi amorem Auguſtorum conciliaverint: verum etiam affabilitatem et mitem ac clementem indolem, qua erga ſubiectos populos et ipſae vterentur, quamque maritis imperatoribus inſpirarent. Atque haec ratio talis videtur, quam ſibi arrogare omnes Auguſtae poſſent: ſed illi tamen ante ceteras placere hic typus debuerat, quae ſe notis Herculeis terribilem fecerat, vt metum hunc eximeret, clementemque ſe et benignam venditaret.

Peruenio tandem ad illud, quod meae ſententiae vel maxime aduerſari videtur. Scilicet illam Galeriam Valeriam, quae ad Maximianum Herculeum pertinet, omnes vno ore EVTROPIAM tertio nomine appellant: citaturque a Mediobarbo et Bandurio numus, ſeu potius pars

numi, cui haec fuerit epigraphe: VAL. EVTROPIA AVG. Nititur id omne vnius fide GOLTZII. Sed, vt libere dicam, ſuſpectus eſt mihi teſtis; non tamquam fidem viri meritiſſimi in dubium temere reuocem: ſed quod in veteribus numismatibus, non optime conſeruatis, pronos nos ad lapſum eſſe, vbi opinione aliqua occupatam mentem afferimus, ipſemet ſaepe in me expertus fui. Inſpice quaeſo accuratiſſime delineatos numos meos, et obſerua inſcriptas aduerſae parti litteras. Ab vna capitis parte legimus GAL. VAL: intermiſſo deinde ſpatio ſatis magno in parte faciei obuerſa leguntur ERIA AVG. Ponamus iam, quod fieri facile potuit, litteras ER non fuiſſe conſpicue integras: Goltzium autem, aut quisquis alius delineauit vel delineandum curauit, memorem fuiſſe nominis EVTROPIAE apud auctores lecti, ad quod vltimae litterae IA belle quadrant: eundemque conſideraſſe interiectum ſpatium: an magnopere mirandum videri debet, ſi, quod voluit, facile credidit, coniecturae ſuae indulſit et litteras ſuppleuit, quas, ſecurus auctorum fide, inſerendas putatitio ſpatio firmiter credidit. Non laudo factum: ſed Goltzii aeuo nondum tam religioſe verſabantur in hoc negotio, quam par fuerat, verum iuuari lectores coniecturis ingenio ſuo conſentaneis pulcrum et corona ciuica dignum credebant.

Praeter hunc Goltzianum laudari alium video, diligentiſſimo Bandurio praetermiſſum; quem quidem delineatum aut accurate deſcriptum videre magnopere opto. Inſcriptio haec refertur ΓΑΛ. ΟΥΑΛ. ΕΥΤΡΩΠΙΑ CEB. Auctorem habeo virum illuſtrem D. D. RINKIVM, academiae Altorfinae anteceſſorem et ſeniorem meritiſſimum,

mum, in ſerie imperatorum, quae tractatui *de vet. numism. pot. et qual.* ſubiecta, et, vt ipſe nos docet, a BAVDELOTIO de DAIRVAL potiſſimum accepta eſt: cuius *tom. II. pag.* 375. totidem apicibus exſtat. Si de hoc Graeco omnia omnino certiſſima ſint, non poterit tamen efficere, vt Latini, ſine hoc tertio nomine, non pertinere ad illam iudicentur. Criſpinam, Commodi vxorem, nemo, quod nouerim, in Latino numismate vidit cum BRVTTIAE nomine. Eandem tamen IO. HARDVINVS ex gaza ſui regis vno exemplo; ſed pluribus deinde NIC. FR. HAYMIVS *in theſ. Britann.* comprobanit, omnibus quidem Graecis, hoc nomine fuiſſe vſam. Sic Fuluiam Plautillam et Anniam Etruſcillam ex Graecis duntaxat nouimus, quum Latinis numis tantum Plautillam et Herenniam Etruſcillam nouiſſemus. Plura huius generis ſponte ſeſe ingererent gnauis rei numismaticae cultoribus: vt hic cumulandis iis ſuperſedere liceat.

Tandem illud etiam adiicio, me illam Galeriam Valeriam, quae Herculeum ornatum praefert, dono illuſtr. FRID. HOFMANNI debere; cui gratiam habebunt, ſi quos eximii et praeſtantiſſimi numismatis conſpectus delectauerit.

NVMVS

NVMVS MARCIANOPOLITARVM DESCRIPTVS

a

I. H. Schulze.

Tab. VII. Fig. 8. Capita aduerſa GORDIANI PII et TRANQVILLINAE AVGG. ΑΥΤοκράτωρ Καῖσαρ Μάρκος ΑΝΤώνιος ΓΟΡΔΙΑΝΟC ΑΥΓουστος. CEB. ΤΡΑΝΚΥΛΛΕΙΝΑ.

= Femina ſtans, dextra ſpicas tenet, ſiniſtra ſcutum. ΥΠ. ΤΕΡΤΥΛΛΙΑΝΟΥ ΜΑΡΚΙΑΝΟΠΟΛΕΙΤΩΝ. In area ſeorſum E.

Eſt ex aere medio in muſeo meo.

Niſi mihi videretur NICOLAI FRANCISCI HAYMII induſtria et accuratum in typis nummorum fideliter exhibendis ſtudium omni dubio carere, potuiſſem hunc meum pro iam edito habere per laudatum virum, leuiter tamen ex ingenio ſuppleto et adiuto; adeoque omnino transmittendum ducere. Nam paucula ſunt, quae diſcrepant ab illo, quem theſauri Britannici *volumine II. pag.* 263. ex muſeo Deuonſhiriano delineatum et deſcriptum dedit. Quum vero et in aduerſa non integram ex ſuo dare potuerit inſcriptionem, et in auerſa parte nonnulla magis, quam vt male conſeruatum archetypon arguant, diuerſa videam: putaui ex meo integerrimo factam delineationem haud eſſe lectori diſplicituram.

De Gordiano et Tranquillina Augg. quod dicam, noui nihil habeo. Leue eſt, quod Haymius praetermiſit, V et Γ in AVΓ coaluiſſe: vt delineatio accurate oſtendet: illa autem non niſi AV exhibet.

In

In parte auerſa Haymius exhibet feminam arae ſuccenſae adſtantem, quae dextra pateram tenet, ſiniſtra autem cornu copiae. Haec ſi ita clare is in ſuo archetypo vidit, efficiunt vt debeat eſſe diuerſus a meo numus, in quo ſpicae ex protenſa manu dextra propendentes ſunt indubiae; vt et clariſſime demittit ſiniſtram ad ſcutum; quum cornu copiae nec minima adſit ſignificatio. Porro etiam ductus litterarum in nomine ciuium, a quibus hic numus cuſus eſt, aliter apud me viſuntur, quam Haymius depinxit. Nam tres litterae OΠΟ ſingulari modo, quem delineatio accurata oſtendit, contractae ſunt. In area autem ante feminam ibi ſtantem E conſpicitur: quod forte quintum annum imperii denotat.

Tandem etiam coalitum binarum litterarum ΩN neglexit, aut forte in ſuo numo non inuenit. Ille autem hoc ſaeculo minime infrequens eſt, vt apparet ex compluribus delineationibus in appendicula ad numos vrbium Graece loquentium a R. P. ERASMO FROELICH edita exſtantibus: Cui doctiſſimo viro maximae debentur gratiae, quod tot praeclara vetuſtatis monumenta in lucem protraxit; infinitae autem ſumme reuerendo P. CAROLO GRANELLI, qui incomparabilem ſuum theſaurum patere ipſi voluit, vt inde produceret, quae quidem delectarent et iuuarent, ſed ſitim potius incenderent, quam exſtinguere valerent. Quantis enim in ceteris numiſmatum generibus abundare debeat opibus, qui in coloniis et vrbibus tantum excellit, coniecturam facile faciunt, qui experti ſciunt quam raro in retia ſua incidere hi thynni ſoleant.

De Marcianopoli addere parum opus eſt. Conditam eam in honorem Marcianae, quae Traiani ſoror putatur,

accepimus. Vnicum huius vrbis numum, cum Marcianae nomine, dedit HAYMIVS laudati theſauri *vol. II. pag.* 209. Inde ad Septimii Seueri tempora, ad quae VAILLANTIVS primum notauit, hiatus eſt. Ab hoc demum complures, et apud ſolum Froelichium viginti non ante eum publicati obueniunt. Vltimus, ni fallor, Philippi iunioris exſtat a IO. HARDVINO notatus. Superfuiſſe tamen vrbem ſaluam adhuc Claudii Gothici temporibus nouimus. Forte inuenientur aliqui vsque ad tempus illud cuſi, quo vrbes ab excudendis ſuo nomine numis feriari omnes iuſſae fuerunt.

Qualem denominare feminam in area depictam debeamus, non determinare auſim. Mihi tamen videtur vrbis eſſe ſymbolum, quae exercendae agriculturae et patriae defendendae aeque ſtrenue inuigilabat. Puto autem ſcutum id eſſe, quod ſiniſtra manu tenet; etſi aliquantulum me dubium reddit figura rhomboides magis quam rotunda aut ouata, quali plerumque ſcuta exhiberi ſolent.

NVMVS

NVMVS CYRENAEORVM PTOLEMAEO INSCRIPTVS.

a
I. H. Schulze.

Numus aereus muſei mei. Caput dei Hammoris = Aquila ſtans, fulmen Iouis vngulis tenens: inter vtrumque pedem monogramma, illi, quod Chriſtianis poſt multa ſaecula placuit ad nomen Chriſti deſignandum, admodum ſimile. Ante aquilam cornu copiae. ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ. Tab. VII. Fig. 9.

Numus, quem exhibeo, eſt integerrimus, et qui ſe antiquum et genuinum firma et nobili aerugine fuſca cuiuis exploranti comprobabit. Magnitudinem totumque eius habitum delineatio accuratiſſima docebit. Non autem exhibeo illum tamquam nouum. Probe enim ſcio multos de eo, et monogrammate, quod exhibet, ſententiam dixiſſe: quas ante hos XLIV. annos ſingulari diſſertatione complexus eſt vir celeberrimus et de omni litterarum republica optime meritus IO. BVRC. MENCKENIVS, qui et iconem, ad noſtram proxime accedentem, adiecit. Poſtea etiam R. P. IO. HARDVINVS ad PLINIVM *lib. V. cap. XXXI. ſect. 36.* dedit ectypon numi auerſa parte haud adeo diſſimilis, et de eo haec diſſeruit: „Eſt ex aere maximae molis numus eximius, qui Iouis „vultum parte priore exhibet; altera titulum ΠΤΟΛΕ-„ΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ cum aquila, quae fulmini in„ſiſtit, et inter aquilae pedes eſt monogramma, quod ibi „arbitramur Χαλκὸς Ροδίων, aes Rhodiorum.

 Caput

Caput in aduerſa parte Menckeniani meique numi eſt Iouis Ammonis, diademate et cornu a temporibus prominente conſpicuum; ſimillimum, ſi diadema excipias, illi Mitylenaeorum, quod MORELLIVS *ſpecim.* XXV. exhibuit cum epigraphe ΘΕΟC ΑΜΜΩΝ. Sed Harduiniana delineatio Iouis Ammonis maximam notam, cornu, omittit: omninoque videtur ille numus aut alium Iouem exhibere, aut aduerſam partem detritam vel aerugine exeſam habuiſſe, quia reliqua etiam imago multum diſcrepat. Sed de Ioue Ammone nihil habeo quod nunc addam toties iam dictis et vbique obuiis.

In auerſa pagina ſiſtitur nobis aquila ſtans, alis demiſſis, quieta et otioſa, Iouis fulmen vngulis ſuis tenens. Quantopere Ptolemaeis haec volucris placuerit, docent plurimi eorum numi, qui illam praeferunt. Sed videas in aliquibus eandem non quieſcentem, verum alas ad volatum pandentem, quin omnino volantem. Tam diuerſi habitus rationem aliquam ſubeſſe valde probabile videtur, et, niſi me omnia fallunt, optime eam docet PINDARVS, quando eximiam ſuam citharam, Apollinis inuentum, quod iure communicationis Muſae etiam poſſident, ita commendat:

Καὶ τὸν αἰχματὰν κεραυνὸν σβεννύεις
Α'εννάου πυρός. Ἕυ-
δει ἀνὰ σκάπτῳ Διὸς αἰετὸς, ὠ-
κεῖαν πτέρυγ' ἀμφοτέρω-
θεν χαλάξαις·
ἀρχὸς οἰωνῶν, κελαινῶ-
πιν δ' ἐπί οἱ νεφέλαν

ἀγκύλῳ

ἀγκύλῳ κρατὶ, βλεφάρων
ἁδὺ κλαῖστρον κατέχευας, ὁ δὲ κνώσσων
ὑγρὸν νῶτον αἰωρεῖ, τεαῖς
ῥιπαῖσι κατασχόμενος.

Quae liberiori paraphraſi ſic redduntur in Oxonienſi editione: „triſulci fulminis inexſtinctum ignem, Iouis iram „placans, exſtinguis, et Iouis aui, aquilae oſcinum prin„cipi ſuper eius ſceptro ſomnum concilias: quo fit vt re„miſſis et laxatis, vtrimque alis dormiat, quum nubem „obſcuram ſoporis ſuper aduncum eius roſtrum, qua ſua„viter clauduntur palpebrae, oculis affudiſti. Tum vero „illa dormiens diffuſu facile et flexibile dorſum attollit, „tamquam tuae harmoniae iaculis ſuperata et oppreſſa.

Apparet et hac antiquarum rerum callentiſſimi magiſtri inſtitutione, quod aquila fulmini quidem, ſed exſtincto, inſidens otioſa et quaſi dormitans, ſignum ſit Iouis placati et benigni. Accedit ARTEMIDORVS *onirocrit.* *II. cap.* 20. qui aquilam deſidentem fauſta ſignificare docet. Quumque Cyrenaei Ptolemaeum ipſum Iouis Ammonis habitu in numis exhibuerint: qualem Ill. SPANHEMIVS propoſuit *tom. I. pag.* 296. ecquid aliud aquila ferias agens, fulmini tamen inſiſtens, deſignabit, quam exercitum eius, ad propulſandas quidem et vindicandas iniurias continuo paratum, nunc autem, domi et cum vicinis pace parta, quietum et feriatum? Pacis porro bona, abundantiam omnium rerum, denotat cornu copiae ad latus aquilae poſitum. Atque haec videntur ſatis iam expedita.

Supereſt autem nunc alia quaeſtio, ſaepius agitata iam a variis doctrina et laude praeſtantiſſimis viris: quid nem-

pe ſibi velit monogramma illud inter aquilae pedes et triſulcum fulmen poſitum? Equidem ſuo loco repoſitas, quae antea prolatae ſunt, ſententias doctorum virorum relinquo: pro ea autem libertate, quae ciuibus litterariae reipublicae permiſſa eſt, attingam pauculis, cur mihi aliqua videantur non ſatis probabilia: deinde quid mihi in mentem venerit, ſubiungam.

In Harduiniana quidem expoſitione illud merito deſiderandum videtur, quod nullo argumento conſtat, hunc numum ad Rhodios pertinere. Certe nihil illorum, quibus alii huius vrbis numi cognoſcuntur, hic apparet: nec vir doctiſſimus vllum aliud ſuppeditat criterium: videturque adeo totum fundamentum explicationis eſſe P litteram. Deinde placere non poteſt, quod in litterarum compendio latitare credidit Χαλκὸς Ῥοδίων, aes Rhodiorum. Quid, quaeſo, opus erat homines monere, hoc, quod omnes ſine dubio oculis ſuis credere poterant, aes eſſe. Neque enim licet cogitare de altero ſignificatu vocis Χαλκὸς, quo oboli octauam partem denotat: nam maximae molis numus hanc explicationem illico reſpuit.

Sed forte hoc ſenſit Harduinus, numum conflatum eſſe ex aere Rhodiis domeſtico, et ex inſulae fodinis eruto, non aliunde allato. Enimuero Rhodum non memini metallorum prouentu celebrari. Nam quod STRABO lib. XIV. ſcribit vrbem Rhodum a Telchinibus conditam, qui primi dicantur ἐργάσασθαι σίδηρόν τε καὶ χαλκὸν; non illico probat, eos in hac vrbe aut inſula haec metalla e terrae viſceribus extraxiſſe. Nam praecedit ibi, veniſſe hos homines primum ex Creta in Cyprum, deinde in Rhodum.

Scilicet

Scilicet in Cypro aes foſſum et excoctum videtur, Rhodi autem fuiſſe artifices, qui ex ferro et aere varia ad vſum pararent. Sic Norimberga plurimos habet ciues ἐργαζομένους χαλκὸν: ſed propterea nullam libram aeris in ſua ipſi regione effodiunt, a mercatoribus autem aliunde importatum accipiunt.

Proſtant ſane antiqui numi, qui metallorum prouentu diuites tractus notant: quales ſub Hadriano cuſi, quibus MET. NOR. et METAL. DELM. inſcribitur, pridem noti: quibus adiiciendus eſt, quem ANDR. MORELLIVS publicauit in ſpecim. rei numar. antiq. *tab.* XXI. METALLI VLPIANI PANN., et alius pag. 215. indicatus, cui METAL. AVRELIANIS inſcriptum eſt. Sed ipſa laudatorum numorum perſpicuitas, quae lectores plena inſcriptione inſtruit, dubitare nos facit de Rhodiis, elegantium et cultorum virorum copia ſemper adfluentibus, quod ſuae prudentiae conuenire putauerint, ſi patriae diuitias iactaturi, id facerent obſcuro monogrammate. Ne dicam, quam indecens videatur vrbi, quae regem honorare cupit, in eodem numo ſuam oſtentare abundantiam.

Aduerſus illos, qui hic latitare initium alicuius epitheti ad Ptolemaeum regem pertinentis, ſuſpicati ſunt, inuictum puto eſſe argumentum, quod doctiſſimus Menckenius in diſſertatione laudata attulit: nullum vnquam ſcriptorem meminiſſe vllius agnominis alicui Ptolemaeo tributi, in quo litterae huius monogrammatis initium faciant. Neque probari vllo exemplo poſſe, quod huius generis adiicialia verba litterarum compendio exhibita fuerint, praeſertim in magnis numis, vbi abunde multum eſt ſpatii capiendis integris vocibus, quae regibus honorem afferant.

Dicam

Dicam nunc, quid mihi videatur, ſed ea conditione, vt magis exercitatorum iudicio liberrimo et aequiſſimo ſubiectas haſce ſuſpiciones meas cupiam. Ipſemet locus, quo poſitum hoc monogramma videmus, non videtur permittere, vt aliquid cogitemus, quod ad principis perſonam priuatim pertineat. Quis enim non putet indecens, ſi pedibus miniſtri ſui ſubiiciendus aut admouendus eſſet princeps. Iam vero aquila, ſi ad Iouem refertur, eſt ipſius miniſter. Et vbi Iouis imagine principem aliquis exhibuit, aquila eidem adiuncta denotabit illum ordinem, per quem fulmina ſua mittit in eos, qui ſe proterue gerendo indignationem ſuam concitarunt. Pedibus igitur aquilae tutantis et protegentis nomen ſuum merito adponunt, qui vel ſubiecti ſunt imperio, vel ſocii, quorum ſecuritas ab aquilae tutela dependet, quique ipſa ſubiectione ſe tutos a fulmine, quod in promtu eſt, ſentiunt.

Ita cogitantem confirmauerunt numi, quos inter Lyſimachi nomen praeferentes non paucos inuenimus, vbi ſellae, cui Pallas in auerſa parte inſidet, ſubſcripta inuenimus, prioribus ſaltem litteris ſuis, nomina vrbium. Tales ſunt bini aurei in commentariis Regiae academiae elegantiorum litterarum Pariſienſis tom. IX. pag. 270. quibus Byzantini ſubſcripſerunt. Lyſimacho autem Pallas non minus, quam aquila Ptolemaeo, placuit: tamquam ſignificare voluiſſet, ſibi potius videri conſilio, quam armata vi, tutari gentes ſubiectas.

Quid, quod ipſi imperatores Romani Iouis, coloſſea magnitudine exhibiti, pedibus ſe apponendos curauerunt. Inſignes ſunt numi aurei in Arſchotanis, tab. XVI. num.

5. et

5: et tab. XVII. num. 9. quibus Traianum Auguſtum ſub pallio Iouis et fulmine eius conſiſtentem adſpicimus: quorum priori circumſcribitur, ne de ſenſu dubitemus: CONSERVATORI PATRIS PATRIAE.

Quaerenti autem mihi vel vrbem Aegyptiam, vel Aegypto ſalutis ſuae cauſa ſociatam gentem, quae in huius monogrammatis ductibus contineatur, obuii fuerunt Cyrenaei, in quos omnia aptiſſime conuenire arbitror. Tres enim priores litterae K. Y. P. plane conſpicuae adſunt. Tamquam baſis eſt P, cuius cruri a latere dextro adhaereſcunt illae in angulum coeuntes lineae, quae cum eo efficiunt K. Iam his Y ita iungitur vt iaceat in huncce modum ≻, atque crus eius decuſſet crus τοῦ P, ſeque a dextris coniungat cum ſuperiori illa linea, quae ad K denotandum iam aderat. Et ſane in numo clariſſime video illum ductum non valde obliquum, ſed fere horizontalem.

Sed et poſſumus litteras ſibi implicatas alio modo, qui ad eundem tamen ſenſum redit, extricare, vt manentibus omnibus, quae de P et K diximus, alteras duas in angulum coniunctas lineas, cruri τοῦ P ad ſiniſtram applicatas, pro K inuerſo accipamus, et pro Y illos binos in angulum coeuntes ductus, inter quos ſemicirculus τοῦ P ponitur. Sic K duplicatum habemus et ſcriptura integra erit K. KYP. id eſt Κοινὸν Κυρηναίων.

Duxit me ad hanc omnem coniecturam numus, quem illuſtris SPANHEMIVS publicauit: cuius altero latere imago regis Ptolemaei cornuta, ad exemplum Iouis Hammonis, ſiſtitur, cum epigraphe ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ: ex altera parte ſilphium exhibetur, cum litte-

 ris

ris ΚΥΡ. ΚΟΙΝ. qua inſcriptione omnem pentapolin Cyrenaeorum comprehendi exiſtimo.

Neque hiſtoria, ſpero equidem, mihi hic repugnat. Docet enim DIODOR. SICVLVS *libr. XVIII.* ad quem modum, quoque tempore Cyrenae, vrbesque vicinae, amiſſa libertate Ptolemaico regno ſubiectae fuerint. Id vero quum primis ſtatim ab Alexandri M. obitu annis acciderit; nullo ſane negotio conficitur, numum hunc, ſubiectionem Cyrenaicae gentis deſcribentem, referendum eſſe ad Ptolemaeum primum, conditorem Ptolemaicae gentis, quae imperium Aegypti vsque ad illud tempus tenuit, quo Romanis tam nobile regnum, ſub ipſa naſcente monarchia, penitus ſubiectum fuit.

Atque haec habui de monogrammate in numis Ptolemaeo inſcriptis occurrente. Nolim tamen contendere hanc explicationem, hiſce numis accommodatam, ceteris monumentis vetuſtis, ante ſuſceptam religionem Chriſtianam elaboratis, ſi qua certae fidei cum hoc monogrammate ſuperſint, debere applicari, eaque ad eundem ſenſum cogi. Sufficiat mihi, ſi idoneis arbitris viſus fuero non improbabilia de his numis attuliſſe.

Proſtant etiam numi Ptolemaeorum, vbi in area viſuntur litterae ΚΙ, quas manifeſtum eſt ibi non poſſe deſignare aeram aliquam, quum illa ſeorſum exſtet. Videant, quibus manibus propriis tractare tales licet, annon forte pro Ι in illis exſtet Υ, quod in detritis et aeruginoſis numis delineantium oculos feſellerit.

De cornu copiae in hoc numo nihil volebam initio adiicere. Nolo tamen reticere, me dubium eſſe, quid illud eſſe dicam, quod ipſi, tamquam fulcrum aut ſcala adiectum eſt. Conſideraui multorum aliorum delineationes,

nes, quarum aliae videbantur taeniam aliquam, illud vincientem, exhibere, aliae potius aliquam machinam, qua ſuſtentetur. Quumque ſciam ſaepe accidere, vt talia pictores, pro ſuo quisque ſenſu, ſtudeant clariora delineando reddere: de meo teſtor, quod fideliſſime curauerim exprimenda, nec quicquam ab archetypo diuerſum fuerit admiſſum.

NVMVS NEAPOLITARVM EXPLICATVS.

a
I. H. Sibulke.

Tab. VII. fig. 10. Caput iuuenile comatum et laureatum NEOΠOΛITΩN.
= Minotaurus, ſupra quem roſa et littera Π, infra monogramma, litteras AP exhibens.
Eſt ex aere paruo in muſeo meo.
Appendicis loco ſubiungitur
fig. 11. Caput laureatum, VIRGILIVS MARO.
= Sol. Eſt argenteus in muſeo meo.

Quoniam numum ad Rhodios nullo iure relatum antea rationibus, vt ſpero, idoneis ab ipſis reuocaui, ſuisque auctoribus reſtitui: idem nunc faciam in alio, vbi non tam coniecturis, quam omnino indubiis rationibus licebit agere.

Hic autem praeſtantiſſimus et nobili aerugine virideſcente totus obtectus, beneficio viri maxime reuerendi et eleganter docti theologi Regiomontani, MICHAELIS LILIENTHALII ad me peruenit: inuentus autem fuit cIↃ IↃCC VII. Tierenbergae in Poruſſiae regno, tractus autem Sambienſis praefectura Fiſchhauſenſi. Illum quum ante complures annos vidiſſet vir de omni antiqua doctrina praeclariſſime meritus THEOPHILVS SIGEFRIDVS BAYERVS, ratus fuit illum Rhodiis deberi, ſuamque de hac re ſententiam expoſuit ſingulari diſſertatione, quam nobiliſſimo et antiquitatum ſtudioſiſſimo viro, NICOLAO KEDERO cIↃ IↃCC XXIII. inſcripſit. Inſerta haec com-

mentatio deinde fuit *Actor. Poruſſic. Vol. II. ſect. V.* quod indicandum cenſui, vt facilius inuenire explicationem antea datam, a qua mihi diſcedendum putaui, vnusquisque poſſit.

Vtar autem illa moderatione, vt ſimpliciter exponam in quo meae rationes diſſideant ab illis, quae viro optimo, cuius tranquillos manes veneror, vero viſae fuerunt ſimiles; quod vbi fecero, arbitrium totius cauſae peritis lectoribus permittam.

Primo omnium me mouet adſcriptum nomen ΝΕΟΠΟΛΙΤΩΝ; ex quo tres priores litterae omnino integrae exſtant, duae autem poſtremae ſatis conſpicuae ſunt. Certe Ω dimidia ſui parte, Ν autem integrum nudo oculo, tanto autem certius armato, cognoſcitur. Quartum in hoc nomine elementum maiori ſui parte quoque apparet. Intermedias non ſatis clare recepit metalli haud exquiſite rotundi defectus.

Quum haec oculis meis arbitratus eſſem, euolui auctores qui ectypa nummorum dederunt. Primum adibam LAVR. BEGERVM, qui *Vol. I. pag.* 530. *num.* 2. exhibet aereum meo per omnia, quoad aduerſam partem, tam ſimilem, vt eſt ouum ouo. Caput enim lineamentis poſituque iisdem videas, capillos coronamque ſimiles, ipſamque ſcripturam loco tractuque ſimillimam. Vnica littera Τ quae eſt in ectypo Begeriano pone caput ſolitaria, quod ad rem parum facit, in noſtro deeſt. Eiusdem auctoris alius eſt *pag.* 352. *num.* 4. qui aeque ſimilis videtur, ſi hoc vnum excipias, quod vultus in dextram partem conuerſus, eique inſcriptio obiecta eſt.

Poſtquam haec ita apud BEGERVM videram, adibam GOLZIVM atque GESNERVM, qui ſimiles aut ex prioribus repetitos dabant. Iuuabat me haec conſideraſſe, quum apud eosdem auctores per Rhodiorum numos accurate irem, omninoque nullum caput illi, quod in noſtro eſt, ſimile, et, quod maius, nullum, quod Apollinis caput habet, non radiatum, nullum quoque vlla littera inſcriptum cognoſcerem. Iam ſi totus habitus numorum vnius eiusdemque ciuitatis aliquid valet ad eos cognoſcendos et diſcernendos; eoque argumento ſummi in re numaria auctores potiſſimum vtuntur: quam haec omnia vehementer faciant ad hunc noſtrum Neapolitanis vindicandum, et a Rhodiis reuocandum, omnes, ni fallor, cognoſcunt.

Poterant haec ſufficere ad omnam hanc cauſam diiudicandam: ſed vtile puto etiam de reliquis dicere, quae meam ſententiam penitus confirmant. In altera ſcilicet numi parte eſt minotaurus, quo nomine vocant animal cetera tauro ſimile, ſed facie virili barbata. Non repetam fabulam omnibus notiſſimam: neque nunc ſollicitabo eorum aſſertum, qui ciuitates hoc animal ſignare ſolitas eodem ipſo vltimam originem a Cretenſibus denotare aſſerunt. Iam vero inter tot numos Rhodiorum indubios neque vnicus viſus vel adductus eſt, in quo minotaurus conſpiceretur: inter triginta Neapolitarum numismata, quae CL. GESNERVS collegit, tria et viginti videas, in quorum poſtica vel integer vel dimidiatus ille exhibetur. De Rhodiis autem ipſemet ille vir doctus, a quo diſſentire me profiteor, ſufficienter probat, quod omnium, qui in Aſia conſederunt, maxime genuinum genus Doricum fuerint,

rint, neque promiſcuam externorum populorum communionem vmquam admiſerint.

Atque hoc argumentum tanti apud ipſum fuit ponderis, vt tandem non auderet Rhodiis in inſula habitantibus hunc numum tribuere, ſed Cauniis, qui in continente inſulae obiecta habitabant, et Rhodiis parebant, eum maluerit tribuere. Qui cum eſſent Rhodiorum ſubiecti, atque, vt STRABONE docente ſcimus, a Cretenſibus originem duxiſſent, numum hunc ita ſignauerint, vt figura primaria oſtenderent ſuos proauos, roſa autem Rhodia faterentur dominos, quorum praetorem aduerſae parti adſcripſiſſent. Putat enim illud nomen forte legendum eſſe ΝΕΟΠΤΟΛΕΜΟΣ.

Apparet quam parum ſuae explicationi fiſus ſit vir doctus: laudandaque eſt ingenua indoles, quae dubium non ſuppreſſit. Iam vero ſi Cauniorum eſt numus, vt ſupponit; quo iure in titulo adſcribebatur Rhodiis? mirum, qui potuerit Cauniis, libertate non gaudentibus, ſed obnoxiis, ius numos cudendi tam facile concedere: quum nulla exſtet probatio, id vllis tali conditione viuentibus licuiſſe.

Quid itaque ſupereſt, quod argumento ſit, Rhodiis hunc numum debere aut poſſe adſcribi? Roſa eſt, minotauro ſuperpoſita, illi ſimilis, quae in plerisque Rhodiorum numis alteram paginam exornat. Ita autem exſtans eſt in illis roſa, vt aream fere omnem ſola impleat: ſi qua autem alia figura, vt nauis, aquila, ſerpens, caduceus, athleta, botrus, delphinus inſuper adiecta ſit, illa minutiſſima exhibeatur. Cuius quidem contrarium eſt in noſtro, vbi minotaurus aream implet, roſula ſuperponitur. Ex quo conſequitur, quod hic numus non ſit Rhodiorum,

diorum, quoniam ex parte confitentem habemus doctiſſimum virum: verba de hoc argumento plura non faciam.

Quoniam autem inter Neapolitarum viginti nummos Geſnerianos, qui minotaurum integrum in auerſa parte exhibent, neque vnicus eſt noſtri ſimilis; omnesque iſti victoriam ſuperuolitantem et coronam animali imponentem exhibent: ex eo ſane apparet eximia noſtri nummi raritas et ſingularitas. Nam quod roſam, aliaque Rhodiorum inſignia conſueta, Neapolitae exhibent, minus mihi admirandum videtur, quam cur non in pluribus illa hodie obtingant viſenda.

Rhodii enim, quod STRABO aperte prodit *libr.* XIV. ἔκτισαν ἐν τοῖς Ὀπικοῖς τὴν Παρθενόπην. Parthenopen, Rhodiorum vetuſtum opus, poſtea ex Chalcidenſibus, Pithecuſaeis, Athenienſibusque, immo ſero tandem Campanis, ſuperadditi prioribus noui incolae auxerunt: ex quo tempore Neapoleos nomine celebrari coepit: vt eodem Strabone docente nouimus. Horum poſtremos inuitis prioribus admitti debuiſſe, certum eſt: quam volentes ſuſceperint ceteros, equidem non reperio. Sed Athenienſium in noua vrbe regenda et conſtituenda voluntatem in primis valuiſſe, multa perſuadent: praecipue quod Apollinem atque Dianam conſeruatores, (Οὐλίους,) Athenarum antiquiſſima numina, praecipuo cultu in numis ſuis proſequuntur.

Videntur autem facile inter ſe conſenſiſſe ex Euboea adducti Chalcidenſes atque Athenienſes in taurum numis ſuis imprimendum; quoniam illi patrium in eo morem ſequebantur; quippe Euboeae numi bouis caput aut protomen exhibent: hi autem Cretenſium tyrannidis atque excuſſi

cuſſi eorum imperii, quod beneficio Dianae ac Apollinis tribuebant, admonebantur. Hinc minotaurum apud Neapolitas, et forte apud plures ciuitates, non exiſtimo memoriam originis Creticae renouare, ſed contumeliarum et iniuriae ab illis acceptarum aliquando monumentum eſſe. Sed et aliam cauſam huius ſymboli facile inuenient, qui obſeruauerint ad oſtia magnorum fluuiorum ſitas vrbes complures, praeſertim illas quae portus et naualia habuerunt, bouem vario modo poſituque exhibuiſſe: ex quo factum puto in Sicilia et magna Graecia vt nihil ſit minotauro frequentius.

Neque tamen propterea deſierunt etiam Rhodi meminiſſe, praecipue illi magiſtratus, qui genus ex illa inſula ducebant. Hinc factum eſt vt in noſtro nummo roſa Rhodia minotauro imprimeretur: in alio apud BEGERVM *pag.* 350. ſolis imaginem poſt caput deae in auerſa parte collocatam notamus. Veroque ſimile eſt factum, hoc fuiſſe poſterioribus temporibus aliquanto rarius, quum familiae antiquiſſimae, e Rhodo huc primum deductae, tandem ad paucitatem redigerentur aut exſtinguerentur. Quare exiſtimo inde deducendam eſſe eximiam raritatem nummorum Neapolitanorum cum roſa vel ſole: quum illorum, in quibus minotaurus eſt cum victoria ſuperuolitante, crebriorem notemus occurſum.

Poteſt alia videri cauſa, eaque non ex Rhodo petita, ſed plene domeſtica, cur roſam Neapolitae nummis ſuis impreſſerint. Scilicet iactare voluerunt vrbis tractusque ſui praerogatiuam in praeſtantiſſimis roſis progignendis. Legatur de eo PLINIVS *hiſt. nat.* lib. XXI. *cap.* 4. et res ſatis erit confecta. „Genera, inquit, eius noſtri fe-

„cere celeberrima Praeneſtinam et Campanam. Eſt genus etiam, „quam centifoliam dicunt; quae eſt in Campania Italiae. Quae autem de Campanis roſis in genere dicuntur, eadem omnia ad Neapolitanas iure eodem referri, non poteſt vlli dubium videri.

Enimuero quemadmodum de Campanis roſis nullum eſſe poteſt dubium: ita de roſa Rhodia videtur res nimis dubia et controuerſa, quam vt de ea olim ſcripta ad noſtras roſas illico transferamus. Aliqui enim ab iſto genere, quod ob floris elegantiſſimam fragrantiam hodie celebramus, Rhodiam longe diſiungunt, quam balauſtii ſeu mali Puniceae florem exiſtimant, tingendisque lanis adhibitam docent: dum alii certant, eminentem aliquam roſae odoratae et coronariae ſpeciem illam fuiſſe, atque in hanc rem allegant DIDYMI ALEXANDRINI teſtimonium ex geoponicis, quae ſcribenti non ad manus ſunt, quo roſis diuinior natura vindicatur: quod vtrum de illis, quae in Rhodiorum inſula naſcebantur, ſeorſim dictum, an de praeſtantiſſimis omnibus intelligendum ſit, diiudicare nunc non poſſum.

Quum vero PLINIVS Alabandicas roſas inter praeſtantiſſimas recenſeat, quarum patria eſt in Caria Rhodo obiecta: nondum audeo accipere illorum ſententiam, qui roſas Rhodiorum in punicae mali florem transformant. Certe, pictura in nummis obuia talis videtur vt ad roſas noſtras flore non pleno facilius mihi poſſe videatur, quam ad punicae florem. Maxime quidem offendet botanicum ille apud BEGERVM vnicus *pag.* 412. *num.* 1. vbi aperte ſiſtitur flos hexapetalus; quum omnium conſenſu roſa ſit pentapetala. Sed quis in talibus praeſtabit antiquiſſimorum

pictorum

pictorum et ſculptorum accuratiſſimam diligentiam? Et ſi nihil illi defecerunt: puto in gentium ac regnorum inſignibus aliquid tribuendum eſſe antiquitati; quam ſequuntur poſteriores, etiam vbi vident priores potuiſſe accuratius pingere. Sic lilia Francici regni quis auſit nunc ad botanicas leges reformare? quis infinita alia in re heraldica? Scilicet alia eſt lex in horto et agris naſcentium florum, alia inſcriptorum nominibus regum.

Quanta ſit aetas huius numi, quoniam indubiis nullis ſignis cognoſcitur, coniectando eruere vix quisquam audebit aut valebit. Illud mihi ſatis certum videtur, cuſum eum eſſe feliciſſimis temporibus vrbis libertate ſua adhuc gaudentis. Nam postquam ſemel magnae Graeciae vrbes Romanis ſubiectae fuerunt, ſuis vti numis deſierunt. Ipſe typus elegantiſſima arte elaboratus de vrbis felicitate, et adiectum integrum nomen de libertate teſtimonium dicunt. Neminem me reprehenſurum exiſtimo, ſi dixero, aetatem bis mille annorum poſſe eum ſuſtinere, immo aliquantum maiorem potius, quam minorem.

Quo pacto in Poruſſiam deferri potuerit, non minori induſtria, quam doctrinae apparatu, diſputat CL. BAYERVS. Equidem ita cum iucunditate illa me legiſſe profiteor, vt optauerim poſſe reddi certa. Illa ſane coniectura de ſuccinaria negotiatione fabulam antiquiſſimam de Phaetonte et ſorore eius Electryone ad hiſtoriam ſatis probabiliter reuocat. Enimuero quicquid praeſidii haec explicatio habere debet ab eo, quod numus Rhodius in Poruſſia inuentus ſit; id nunc valde vacillat, poſtquam apparet, numum non eſſe Rhodium, ſed Neapolitanum.

Adeo igitur mutabimus vrbes, atque Neapoleos incolas nauigaſſe vel pedeſtri itinere huc profectos dicemus.

Equidem non auſim id vel negare vel affirmare: quum quotidie videamus ad fora profectos mercatores omnis generis et commatis nummos ſecum ferre; nec adſtringi poſſint vel ſoleant vt ſuae quisque patriae propriis nundinetur.

Supereſſet nunc, vt dicerem de litteris in poſtica parte obuiis. Sed quum non habeam certum, quod adferam: ipſi beneuolo lectori et ſpectatori diiudicandum permittam, debeatne Π, quod ſuper minotaurum clare intelligitur, coniungi cum litteris ΑΡ, quae ſub eodem viſuntur, an ſuperiori adiungendae, ad integram vocem efficiendam, videantur quaedam litterae: τὸ ΑΡ autem initium alius vocabuli habendum ſit.

Equidem in vllo Neapolitarum nummo adhuc edito non potui conſpicere hominis cuiusdam integrum nomen. In multis ſingularem aliquam litteram, aut binas vel ternas video pedibus minotauri interpoſitas. Complures capiti feminino in anteriori facie numi expreſſo, ſubiiciunt ΑΡΤ. vel plene ΑΡΤΕΜΙΣ: cuius exempla apud GOLZIVM videantur. Quid ſi accipiamus τὸ Π pro Πρύτανις, aut pluratiuo numero Πρυτάνεις, vt denotet praefectum vel praefectos ſacrorum in honorem ΑΡτέμιδος faciundorum? Sed nihil determino, quum me maxime retineat, quod non Dianae, ſed Apollinis caput in auerſa conſpicitur. Inſuper etiam me detinet, quod deae tam honoratae nomen minotauri, qui vrbis ſymbolum eſt, ſubiicere pedibus, ſemperque virginem ad tauri virilia collocare nimis indecens fuiſſet.

Quum beneuolum lectorem hactenus Neapoli detinuerim, antequam illinc diſcedamus, ſubiiciam eius oculis nummulum argenteum: de quo ipſemet edoceri vehemen-

ter vellem, annon Neapoli ſit tribuendus. Exſtat in altera parte caput laurea circumdatum, cum litteris VIRGILIVS MARO. Sub capite floriger ramus roſae, vt videtur, expreſſus fuit: ſed temporis iniuria hac potiſſimum parte detritus eſt. Alteram faciem totam implet Solis caput ample radiatum. Ambitum delineatio accurate ſiſtit: eſt autem minime craſſus et appendit grana, medicorum quidem ponderis, decem.

Neapolin ſpirat Solis imago, quam alibi in numis huius vrbis conſpici antea dicebam. Eodem conſpirat roſa ſub capite Virgilii, vt mihi quidem plane videtur, iacens. In hac autem vrbe ſepultum eſſe magnum hunc vatem, monumentumque habuiſſe, ſunt magni multique, qui affirmant, teſtes, quibus fidem nemo derogat, praeter IO. HARDVINVM, et quibus ille perſuadere potuit.

Equidem nolim contendere hunc numum eſſe publica auctoritate, et vel viuo vel nuper mortuo Virgilio cuſum: neque audeo tamen ipſum nuperis numorum antiquorum fabris illico tribuere. Iudicent liberrime eruditi. Mihi propterea viſum fuit illum proferre, quoniam video in nupera collectione Tigurina illum non comparere, quum tamen in illis tabulis, vbi illuſtrium ac celebrium perſonarum numi proponuntur, etiam ficti quidam non omnino repudiati ſint. Ex quo plane adducor vt credam meum hunc nunquam fuiſſe in lucem protractum, qua non indignus mihi videtur, quoniam certe aliquam non inuenuſti ſaeculi aut inficeti magiſtri ſignificationem praebet.

Tanto autem libentius adieci Neapolitano indubio et antiquiſſimo hunc, quem Neapolitanum, ſed incertioris aeui, exiſtimo, quoniam ab eodem celeberrimo LILIENTHALIO, cui me priorem debere profeſſus ſum,

hunc etiam accepi eodem tempore : adeoque ipſi gratias me debere publice profitendi occaſionem non putaui dimittendam.

Quum haec pridem ſcripſiſſem, ipſumque nummum amicis ad me venientibus identidem oſtendiſſem, allatus ad me fuit a curioſo numorum inueſtigatore aliquis Mantuanus aereus admodum recens, cuius alteram faciem ſol illuſtrat et circumſcriptum CAR. IMP. DVX MAN. 1731. in altera legitur SOLDO DI MANTOVA. Hoc indicio excitatus coepi de huius principatus numis amplius diſpicere, facileque cognoui exſtare vnciales etiam, ſeu, vt loqui ſolent, ſcutatos a Mantuae ducibus cuſos, in quorum parte auerſa ſol impreſſus eſt.

Fateor me neſcire a quam longo tempore Mantua ſolis emblemate in ſuis numis vtatur. Sed quod Mantuani ciuem ſuum recenſere ſolent magnum Maronem; non video cur improbabile ducam alicui Mantuano veniſſe in animum cogitare quam aequum ſit tam honorifico vrbi ſuae ciui aliquod monumentum condere.

Quanto itaque iuſtius ad Neapolitanos, quam ad Mantuanos hic numus pertineat, et an omnino ad alterutram vrbem referri debeat; quo tempore, quoue conſilio, et quibus auſpiciis ſit cuſus; et quae ſunt alia ad notitiam eius plenam ſcitu neceſſaria, ſi quis cum publico communicare velit, efficiet ne quem forte poſt longius tempus ille vel ſuſpenſum teneat, vel in errorem deducat.

DE.

DENARIVS ARGENTEVS ARABICVS EXPLICATVS

a

I. H. Schulze.

Magnam apud philologiae orientalis amatores gratiam iniit clariſſimus KEHRIVS, quum ante hos XVII. annos luci publicae exponeret decem et octo numos Arabicos vetuſta ſcriptura Cufica inſignitos, prope Gedanum forte inuentos. Non enim ſolum iſtius ſcripturae, quae non multis apud nos monumentis conſeruatur, intelligentiam planiorem reddidit: verum illud maxime conſequutus eſt, vt ipſi multum debituri ſint poſteri, qui in colligendis numis Arabicis, eorumque adornanda ſerie, aliquando collocaturi ſunt induſtriam. Tab. VII. Fig. 12.

Nam quum ſeriem imperatoriorum numorum plerique claudant cum Heraclio, ſub cuius imperio deus permiſit, vt Muhammedes ſua impietate orbem faſcinaret: atque ab eo tempore parum elegans et praeclarum, quodque colligenti magnum operae pretium afferat, apud Graecos Latinoſue occurrat: commode ſane accidit, vt paucis ab initio Muhammedis interiectis annis prodirent ſane nitidi et cognitione eruditae Europae haud indigni numi Arabici; quorum forte maior, quam creditur, multitudo proſtat.

Quoniam autem legendis illis et intelligendis non exiguus vſus Arabicae linguae neceſſarius eſt: euenit fere, vt quos nullus labor fatigare potuit in Graecis Romaniſue inueſtigandis et perſcrutandis, iidem ab his deterreantur, non ſolum ductuum multiplici varietate, verum etiam characterum eandem figuram habentium aequiuoco et multiplici valore

valore in hoc antiquiſſimo ſcribendi genere notis, quae poſterius aeuum adinuenit, deſtituto.

Enimuero nihil tam arduum eſt, quod non vincat aſſidua induſtria: atque vſus quotidianus non longiſſimo tempore ex tironibus facit promtos artifices. Spero autem futurum, vt multum adiuuetur eorum, qui ad hoc ſtudium acceſſuri ſunt, induſtria, ſi in lucem protrahantur, ac omnium vſibus accommodentur ſatis multa Cuficae ſcripturae ſpecimina, quae in bibliothecis aſſeruantur. Equidem nec ſtudio nec ſumtibus parco, vt complura comparem vndiquaque ſpecimina, quae a peritis delineanda curo, vt artis chalcographicae ſubſidio poſſim in lucem proferre: iamque omnino non contemnendam copiam conſequutum me gaudeo, quam omnem vſibus publicis, vt deſtinaui, ita indies expolio et exorno, vt ampliſſimis vſibus accommodata emittam.

Nunc autem viſum fuit numariam ſupellectilem augere ectypo numi argentei integerrimi et nitidiſſime expreſſi et optime conſeruati. Peruenerunt ad meas manus complures, ſed fere omnes aliqua ſui parte euanidas litteras abſcondentes, vetuſtate detriti, vel fracti mancique: quos vel oculatiſſimus non poſſet legere et explicare, niſi integriora exempla docerent, quid in detritis deeſſe intelligendum ſit.

Tanto autem libentius hunc in Pomerania inuentum et ab excell. profeſſore ANDR. WESTPHALO mihi donatum et Gryphiswaldia transmiſſum, cum publico communico, quoniam inter multos a doctiſſimo KEHRIO publicatos, luculentos certe illos, nullus eſt, qui duplicem in parte aduerſa circulum habet, eamque ſententiam, quam

in

in tribus aliis, quos muſeum meum aſſeruat, itidem invenio. Sed ad ipſum venio numum, cuius magnitudo ea eſt, qua depictum ſiſto.

Facies aduerſa illa merito iudicatur, qua primarium religionis Muhammedicae ſymbolum conſpicitur. Illud autem in media area legitur:

لا اله الا الله وحده لا شريك له

Non eſt deus, praeter illum vnicum: non eſt ipſi ſocius.

Vocant id Moslemi كلمة التقوى: quaſi dicas confeſſionem pietatis breuiſſimam: itemque كلمة التوحيد: quaſi vnificationis ſymbolum.

Circulus exterior hanc habet ſententiam:

لله الامر من قبل ومن بعد ويومئذ يفرح
المومنون بنصر الله

Dei eſt negotium ante et poſt: et die illa laetabuntur fideles in auxilio Dei.

Notabilis haec ſententia deſumta eſt ex Corani Surat. XXX. verſ. 4 5. Inſcribitur illud caput *Roma*, quia imperatoris Conſtantinopolitani exercitum a Perſis victum commemorat; ſed intra paucos annos futurum praedicit, vt Romani viciſſim deuincant Perſas. Quantopere hinc prophetae ſui veracitatem confirmare Moslemi contendant: legi poteſt apud Maraccium et nouiſſimum Corani interpretem et commentatorem Anglum. Verborum autem ſenſui explicando nihil opus eſt immorari: quoniam omnia ſunt planiſſima.

Circulus interior haec legenda exhibet:

بسم الله ضرب هذا الدرهم بمدينة السلام

سنة ثمان ومايتين

In nomine Dei percuſſus eſt hic denarius in vrbe pacis (Bagdado) anno octauo et ducenteſimo.

Annus hic Hegirae CCVIII. reſpondet anno aerae noſtrae DCCCXXII, quo Chalifatui praeerat Almamon Raſchidi filius.

Denarium reddidi Arabicam vocem Dirham, non ſine exemplo aut ratione. Manifeſtum enim mihi videtur id nomen eſſe ex Graeco δραχμὴ: quam Romani denarium conſtanter vocant. Ponderis tamen rationes non debent accurate exigi. Diſputauit de iis EDVARDVS BERNARDVS in doctiſſimis libris de menſuris et ponderibus antiquis. Hic, qui delineatus eſt, aequat grana medici ponderis L. Sed ſunt ad manus quinque alii, ſinguli nomine eodem Arabico inſcripti, quorum is, qui grauiſſimus eſt, grana LIII. aequat, leuiſſimus XLIV. Ceteri inter haec pondera vario diſcrimine verſantur.

Quando autem denarium argenteum vocaui, iuuabit admonuiſſe, quod in Arabum ore multum diſcrepent Dirham et Dinari: hocque vltimum nomen aureo numo proprie tribuatur. Eſtque pondus τοῦ Dinari maius, quam τοῦ Dirham. Pretii autem proportio fere illa eſt, vt XX. aut XXV. argentei denarii vno aureo permutentur; quod, vt ego exiſtimo, pendebit ex multum et fere in ſingulis diuerſo pondere.

Ceterum cogitari poteſt, tantillum puri argenti, tam ample extenſum, craſſitiem numo valde modicam conceſſiſſe.

ceſſiſſe. Vnde non mirum videri debet, ſi pleroſque eorum, qui ad noſtram aetatem perdurarunt, fiſſuris laborare deprehendimus; quas vel crebram agitationem illorum, qui metalli probitatem inflectendo explorare voluerunt, induxiſſe reor, vel rudius impactos et adactos ligones iſtorum, quibus terram effodientibus obuii fuerunt facti. Tantoque magis merentur hi numi honorem et diligentem cuſtodiam, qui per tantum tempus incolumes ad nos delati ſunt. Atque vtinam omnes incidant in dignas manus, qui eos a conflatoribus tueantur, atque condendis et locupletandis ſeriebus adhibeant.

Sed progredimur ad partem auerſam, cuius area includit alterum articulum religionis Moslemicae;

لله

محمد رسول الله

Deo. Muhammed eſt legatus Dei.

Quid ſibi velit repetitio illa nominis Dei in caſu tertio, fateor me ſatis non capere. Sunt autem ad manus tres alii, vbi idem factum video. An forte ſe refert ad verba areae prioris: non eſt ipſi ſocius: vt ſit quaſi explicatio, ipſi, ſcilicet Deo? An eodem ſenſu, quo Romani monumentis ſuis inſcribebant D. O. M. S. Sed de eo ſtatuant eruditi. Cetera ſatis aperta ſunt.

Circulus aream cingens habet ſententiam ſequentem:

محمد رسول الله ارسله بالهدى ودين
الحق ليظهره على الدين كله ولو
كره المشركون

Muhammed eſt legatus dei, quem miſit cum directione et religione veritatis, vt apparere faciat eam ſupra religionem quamcunque aliam, etiamſi renuant aſſociatores.

Quae totidem ferè verbis leguntur in Corano, Sur. LXI. verſ. 9. nullaque declaratione opus habent.

Ceterum hoc pertinet ad commendationem propoſiti numi, quod elegantiam ſcripturae Cuficae, omnesque eius leges, accurate obſeruat. Apparuit id mihi maxime comparanti illam cum fragmento Corani Cufici manu elegantiſſima in praegrandibus membranis exarati, quod auguſta ſereniſſimi ducis Brunsuicenſis bibliotheca, quae Guelpherbyti eſt, aſſeruat: vt et cum chartaceo fragmento ſatis maguo, quod in celſiſſimorum Haſſiae Landgrafiorum Caſſellana exſtat.

Facit ad lectionis facilitatem, quod litterae illigabiles ſunt a ſequentibus rite ſeparatae; quodque finales figurae ſingulas voces finiunt. Enimuero dantur alii numi huius etiam antiquae aetatis, in quibus hae leges non obſeruantur, ſed omnia ſerie continua ſeſe ſubſequuntur: ipſi autem ductus tam minuti ſunt, vt vix bene dignoſci poſſint. Quod genus, ad Kirmathicum proxime accedens, difficultatem maiorem lectori obiicit. Enimuero facile adſueſcet etiam huic ſtudioſus lector, ſi ſe ante omnia exerceat in eruenda ſcriptura, quae aream circuli inſtar ambit. Quantum enim mihi adhuc videre licuit, in omnibus, qui duplicem circulum in aduerſa habent, exterior exhibet ſententiam ex Surata XXX. in auerſa autem illam ex LXI. His itaque tamquam claue vſus, cetera, praeſertim quae areae faciei auerſae inſcripta ſunt, facilius aſſequetur. Illa autem plerumque habet nomen et titulos principis quo

jubente

iubente numus cuſus fuit. Vbi ſimplex eſt circulus circa aream aduerſae partis, ille ſemper dat nomen vrbis, ex qua numus prodiit, cum nota temporis. Vbi vero ille duplex viſitur, ex interiori haec eruenda ſunt. Aeſtimanda itaque numi bonitas inde praecipue fuerit, ſi ſcripturae his binis locis nihil acciderit, quod lecturi ſtudium fruſtretur.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE.

DE

DE SITV GEOGRAPHICO IAKVTI (IAKVTSK) VRBIS SIBIRIAE AD FLVVIVM LENAM SITAE

AVCTORE
G. Heinſio.

Transmiſſae nuper ſunt ad Academiam obſeruationes aſtronomicae, quas Kraſſilnikow, Geodaeta expeditionis in Kamtſchatkam, vir in praxi aſtronomica exercitatiſſimus, Iakuti habuit, pro determinando huius loci ſitu geographico. Latitudinem eius borealem ex altitudinibus meridianis Solis et fixarum ipſe definiuit $62^{\circ}. 2'$; ad longitudinem vero cognoſcendam varias inſtituit obſeruationes Eclipſium Lunae et Satellitum Iouis, occultationum fixarum a Luna, ex quibus vero ob defectum obſeruationum reſpondentium aliorumque requiſitorum nullam deduxit concluſionem. Elegi ex iſtis aliquas eclipſium Satellitum Iouis obſeruationes, quas cum ſimilibus obſeruationibus Petropoli habitis comparari poſſe praeuidebam, vt inde demum differentia meridianorum inter Petropolitanum et Iakutenſem erui poſſet. Ad hunc finem aſſequendum tempora vera Eclipſium Iakuti obſeruatarum requirebantur. Kraſſilnikow in diario ſuo tempora eclipſium tantummodo iuxta horologium, oſcillatorium notauit, cuius vero ſtatum ſingulis diebus, ſi coelum fauerit, per altitudines Solis reſpondentes explorauit. Exinde igitur, adhibitis debitis correctionibus, tempora, quibus ſingulis diebus meridies verus contigit, et tandem tempora vera eclipſium Satellitum Iouis determinaui. Tabulae ſubiunctae eclipſes tum Iakuti, tum Petropoli obſeruatas, quarum compara-

tio conceditur, exponunt; quas deinceps ipſae deductiones excipiunt, in quibus, cum propter differentiam meridianorum inter Petropolitanum et Iakutenſem nimis magnam rariſſime obſeruationes immediate ſibi reſpondentes occurrant (quemadmodum in noſtro negotio vnica tantum eiusmodi comparatio locum habet) ſaepiſſime reuolutiones Satellitum tum ex tabulis depromtas, tum ex obſeruationibus non multum a ſe inuicem remotis deductas adhibere, et ope iſtarum obſeruationes ita accommodare debui, ac ſi in vtroque loco iſtae die eodem inſtitutae fuiſſent. Inde demum conſtitit quaeſita meridianorum differentia 6. hor. 37.′ 40″ in tempore, prout ex ſequentibus fuſius patet.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS

Iakuti obſeruatae a Geodaeta Kraſſilnikow tubo 14. ped. Londinens.

Stylo veteri	tempore vero aſtronomico	Conditiones obſeruationum
an: 1737		
Nouembr. 16.	7ʰ. 13′. 0″	Emerſio Sat. 1ᵐⁱ coelo quidem ſereno, Iupiter tamen per nubes tenues lumine debilis apparebat.
an: 1738		
Iulii 25.	12. 46. 7	Immerſio Sat: 1ᵐⁱ obſeruatió propter nubes et viciniam Lunae dubia.
Auguſt 31.	11. 44. 24.	Immerſio Sat: 2ᵈⁱ coelo ſereno.

Auguſti

Auguſti	31^{a}	16.	54.	1	Immerſio Sat: 1^{mi} obſerv. dubia ob nimium creſpuſculum.
Octobr:	2.	11.	42.	31.	Immerſio Sat: 2^{di} obſeruatio eſt dubia, quia Satelles proxime ad Iouem vmbram ingreſſus eſt; quam ob cauſam minuta tantum prima temporis in horologio annotata fuerunt.
		13.	37.	25.	Immerſio Sat: 1^{mi} Obſeruatio ob easdem circumſtantias dubia.
	27.	10.	29.	22.	Emerſio Sat: 1^{mi} tempeſtate placida.
Nouembr:	5.	6.	52.	1	Emerſio Sat: 1^{mi} coelo ſereno.
Decembr:	14	5.	10.	20.	Emerſio Sat: 1^{mi} Obſeruatio exacta, coelo ſereno.
	21.	7^{h}.	$2'$.	$3''$.	Emerſio Sat: 1^{mi} coelo ſereno.
an: 1739.					
Ianuar:	6.	5.	15.	46.	Emerſio Sat: 1^{mi} coelo ſereno,
	13.	7.	8.	58.	Emerſio Sat: 1^{mi} tempeſtate placida.

OBSERVATIONES

Eclipſium Satellitum Iouis Petropoli habitae, quae cum praecedentibus conferri poſſunt, vbi ſimul ratio habetur diuerſitatis tuborum, ſupponendo differentiam temporis in eclipſi Satellitis 1^{mi} vel 2^{di} per tubos, Newtonianum 5. ped. et Aſtronomicum 14. vel 15. ped. viſa, $= 15''$; ita tamen vt ad circumſtantias obſeruationum in hac reductioue ſimul attendatur.

 Stylo

Stylo veteri.	Tempore vero aſtronomico.	Conditiones obſeruationum.	Tempus verum, quo eclipſis obſeruari debuiſſet tubo 14. ped.
an: 1737.			
Nouembr: 14.	6ʰ 7′. 35″.	Emerſ. 1mi tubo Newt: 5. ped, quae tamen circiter 15″ citius contingere potuit, quia obſervatio per nebulam peracta eſt.	6ʰ. 7′. 50″.
an: 1738.			
Iulii 23.	11. 39. 28.	Immerſ. 1mi tubo 15. ped. coelo pauliſper vaporoſo.	11. 39. 28
Auguſt: 22.	13ʰ. 50′. 44″.	Immerſ. 1mi tubo 15. ped.	13ʰ. 50′. 44″.
27.	15. 46. 7	Immerſ. 2di tubo 15. ped. coelo ſereno.	15. 46. 7
Septembr: 7	7. 44. 55.	Immerſ. 2di tubo 15. ped. ♃ in vicinia horizontis.	7. 44. 55
12.	12. 23.	Immerſ. 1mi tubo 15. ped.	12. 12. 23
28.	15. 47. 2	Immerſ. 2di tubo Newt: 5. ped. ventus hanc obſerv. pauliſper turbauit.	15. 46. 47

Octo

Octobr:	2.	6.59.22.	Immerſ. Sat: 1mi tubo Newt: 5. ped. Obſerv. dubia quia Satelles proxime ad Iovem eclipſin paſſus eſt.		6.59. 7.
Nouembr:	1.	11.18. 8.	Emerſ: 1mi tubo Newt: 5. ped. quae vero cum per nebulam obſeruata fuerit 8″ vel 10″ citius contingere potuit.		11.18.15
Decembr:	19.	5.56.19.	Emerſ: 1mi tubo Newt: 5. ped. Obſeruatio accurata.		5.56.34
an. 1739.					
Ianuar:	11.	6. 3.15.	Emerſ: 1mi tubo 15. ped.		6. 3.15

DEDVCTIONES

pro determinanda meridianorum differentia inter Petropolitanum et Iakutenſem.

Emerſ. 1. Petropoli obſerv. Nov. 14. 1737.	6^b.	$7'$.	$50''$
Si addatur vna Satellitis Reuolutio ex tabulis.	1^d. 18.	28.	36
Em: 1. obſeruari debuiſſet Petropoli Nov. 16.	0.	36.	26
quae vero obſeruata eſt Iakuti	7.	13.	0
a) differentia meridianorum	6.	36.	34
Im: 1. Petropoli obſeruata 1738. Iulii 23.	11^b.	$39'$.	$28''$
Si addatur vna Satellitis Reuol. ex tab.	1^d. 18.	28.	36

Im: 1. obſeruari debuiſſet Petropoli Iulii 25.	6. 8. 4
quae vero obſeruata eſt Iakuti	12. 46. 7
b) differentia meridianorum	6. 38. 3
Im: 1. Petropoli obſerv. 1738. Sept. 7.	12ᵇ. 12′. 23″
- - - - - - - - - - Aug. 22.	13. 50. 40
interuallum, quod 9. reuolutiones efficit. 15′. 22′. 21′. 39″	
hinc 4. reuolutiones Satellitis 7.	1. 56. 17
quare cum Petropoli obſeruata ſit Im: 1. Sept. 7.	12. 12. 23
Im: Petropoli obſeruari debuiſſet Aug. 31.	10. 16. 6
iſta vero Iakuti obſeruata eſt	16. 54. 1
c) differentia meridianorum	6. 37. 55

In comparatione obſeruationum Petropolitanarum d. 22. Aug. et 7. Septembr. tempora vera adhibuimus, adeoque hoc interuallo dies Solares eiusdem magnitudinis ſuppoſuimus. Etiamſi vero dies Solares inaequales ſtatuantur et per aequationes temporis emendentur; calculo abſoluto diſcrepantia vix 2. ſecundorum prodit, ita vt inaequalitates dierum Solarium in hoc negotio ſolicite curare non opus ſit.

Im: 2. Petropoli obſerv. 1738. Sept. 7.	7ᵇ. 44′. 55″
- - - - - - - - - - - Aug. 27.	15. 46. 7
Interuallum, quod efficit 3. Reuol. Satell. 10ᵈ.	15ᵇ. 58′. 48″
vnde reuolutio vna 3.	13. 19. 36
quare cum Im: 2ᵈⁱ obſerv. ſit Petrop. Aug. 27.	15. 46. 7

Im

Im: 2. Petropoli obſeruari debuiſſet Aug. 31.	5.	5.	43
quo die Im: 2. obſeruata eſt Iakuti	11.	44.	24
d) differentia meridianorum	6.	38.	41
Im: 2. Petropoli obſerv. 1738. Sept. 28.	15.	46.	47
Si addatur reuol. vna Satellitis ex tab.	3ᵈ. 13.	17.	54
Im: 2. Petropoli obſerv. debuiſſet Octobr. 2.	5.	4.	41
quo die Im: 2. obſeruata eſt Iakuti	11.	42.	31
e) differentia meridianorum	6.	37.	50
Im: 1. Iakuti obſeruata 1738. Octobr. 2.	13.	37.	25
Im: 1. Petropoli obſeruata die eodem	6.	59.	7.
f) differentia medianorum	6.	38.	18
Em: 1. Iakuti obſerv. 1738. Nov. 5.	6.	52.	1
- - - - - - - - - Octobr. 27.	10.	29.	22
Interuallum, quod. 5. reuol. efficit	8ᵈ. 20.	22.	39
hinc 3. reuolutiones Satellitis	5. 7.	25.	35
quae ſi addantur Em: 1. Iakuti obſ. Octobr. 27.	10.	29.	22
Em: 1. Iakuti obſeruari debuiſſet Nov. 1.	17.	54.	57
quo tempore Petropoli obſeruata eſt	11.	18.	15
g) differentia meridianorum	6.	36.	42
Em: 1. Iakuti obſerv. 1738. Dec. 21.	7ʰ.	2′.	3″
- - - - - - - - - - Dec. 14.	5.	10.	20
Interuallum, quod 4. reuol. efficit	7ᵈ. 1.	51.	43
hinc vna Satellitis reuolutio	1. 18.	27.	56
quae ſi ſubtr. ab Em: 1. Iakuti obſ. Dec. 21.	7.	2.	3

Em:

Em: 1. Iakuti obſerv. debuiſſet Dec. 19.		12.	34.	7
quo die iſta Petropoli obſeruata eſt		5.	56.	34
h) differentia meridianorum		6.	37.	33
Em: 1. Iakuti obſerv. 1739. Ianuar. 13.		7.	8.	58
- - - - - - - - Ianuar. 6.		5.	15.	46
Interuallum, quod 4. reuol. efficit	7^d.	1.	53.	12
inde reuolutio vna	1	18.	28.	18
quae ſi ſubtr. ab Em: 1. Iakuti obſ. Ian. 13.		7.	8.	58
Em: 1. Iakuti obſeruari debuiſſet Ian.	11.	12.	40.	40.
quo die iſta Petropoli obſeruata eſt		6.	3.	15
i) differentia meridianorum		6.	37.	25

Igitur differentia meridianorum inter Petropolitanum et Iakutenſem

	a)	6^h.	$36'$.	$34''$
Pleraeque concluſiones	b)	—	38.	3
dubiae ſunt ex circum-	c)	—	37.	55
ſtantiis obſeruationum	d)	—	38.	41
et non nullae etiam	e)	—	37.	50
ex methodo deducen-	f)	—	38.	18
di iſtas, vnde medium	g)	—	36.	42
eligendo, erit differen-	h)	—	37.	33
tia meridianorum me-	i)	—	37.	25
dia		6^h.	$37'$.	$40''$

quae in Aequatore efficit	$99°$.	$25'$
vnde ſi Longitudo Petropoli ab inſula Ferro	47.	49 ſtatuatur
erit Longitudo Iakuti	147.	14

FINIS.

INDEX
COMMENTARIORVM

In claſſe Mathematica.

L. Euleri, Methodus integrandi formulas differentiales rationales vnicam variabilem inuoluentes. p. 3.
G. W. Krafftii, De ſuperficie cylindri et coni ſcalenorum. p. 92.
L. Euleri, Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales. p. 99.
Eiusd. Theoremata circa diuiſores numerorum in hac forma $paa \pm qbb$ contentorum. p. 151.
Eiusd. De motu corporum flexibilium. p. 182.

In claſſe Phyſica.

I. G. Du Vernoi, Animaduerſiones variae in Erinaceorum terreſtrium anatomen: quarum nonnullae nunc ad ſtructuram veſicularem viſcerum: nonnullae ad nouorum renum ſuccenturiatorum illuſtrationem pertinent. p. 199.
I. Weitbrechtii, De pituita glutinoſa laryngis. p. 207.
G. W. Krafftii, De calore et frigore experimenta varia p. 218.
Eiusd. Obſeruationes Meteorologicae inſtitutae Petropoli An. 1742. p. 240.
Eiusd. Obſerv. Meteorl. An. 1743. p. 247.
Eiusd. De denſitate metallorum ſecum permixtorum. p. 252.

G. W.

G. W. Richmann, Qua ratione inſtrumentum, quo quantitas aquae, calore atmoſphaerae naturali ex ſuperficie aquae certa in aërem eleuatae, commode menſuratur, conſtrui debeat. p. 273.

I. Weitbrechtii, De vera ſignificatione proceſſuum mamillarium cerebri. p. 276.

M. Lomonoſow, De tincturis metallorum. p. 286.

G. W. Richmanni De electricitate in corporibus producenda noua tentamina. p. 299.

In claſſe Hiſtorica.

I. H. Schulzii, Duo numi Geloenſium illuſtrati. p. 327.

Eiusd. Numi Traiani et Iuſtiniani Augg. quibus barbari exhibentur. p. 332.

Eiusd. Galeriae Valeriae Aug. numi illuſtrati. p. 343.

Eiusd. Numus Marcianopolitarum deſcriptus p. 352.

Eiusd. Numus Cyrenaeorum Ptolemaeo inſcriptus p. 355.

Eiusd. Numus Neapolitarum explicatus. p. 364.

Eiusd. Denarius argenteus arabicus explicatus. p. 375.

Aſtronomicae Obſeruationes.

G. Heinſii, De ſitu geographico Iakuti vrbis Sibiriae ad fluuium Lenam ſitae. p. 385.

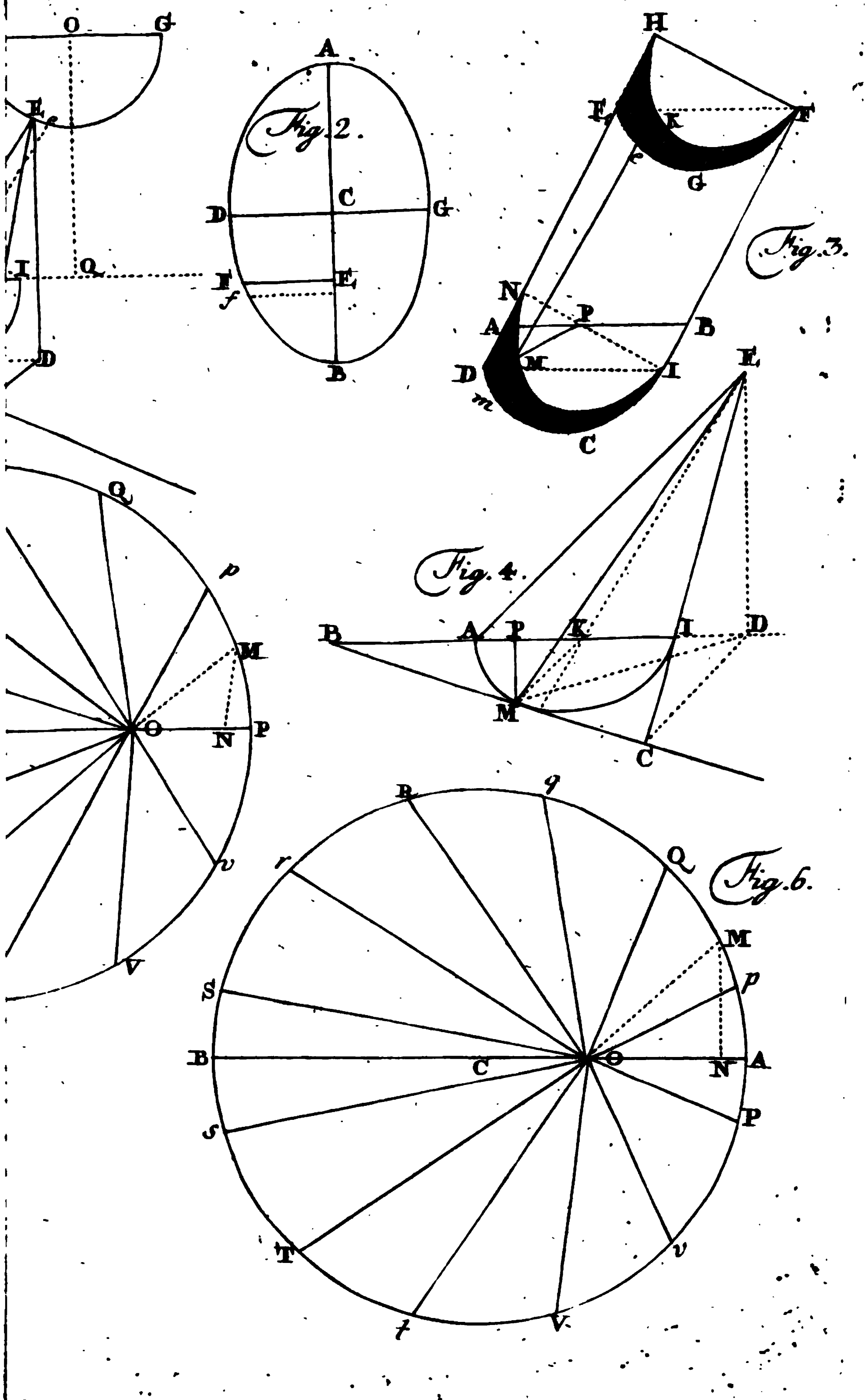


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
M
N
O
P
Q
S
T
V

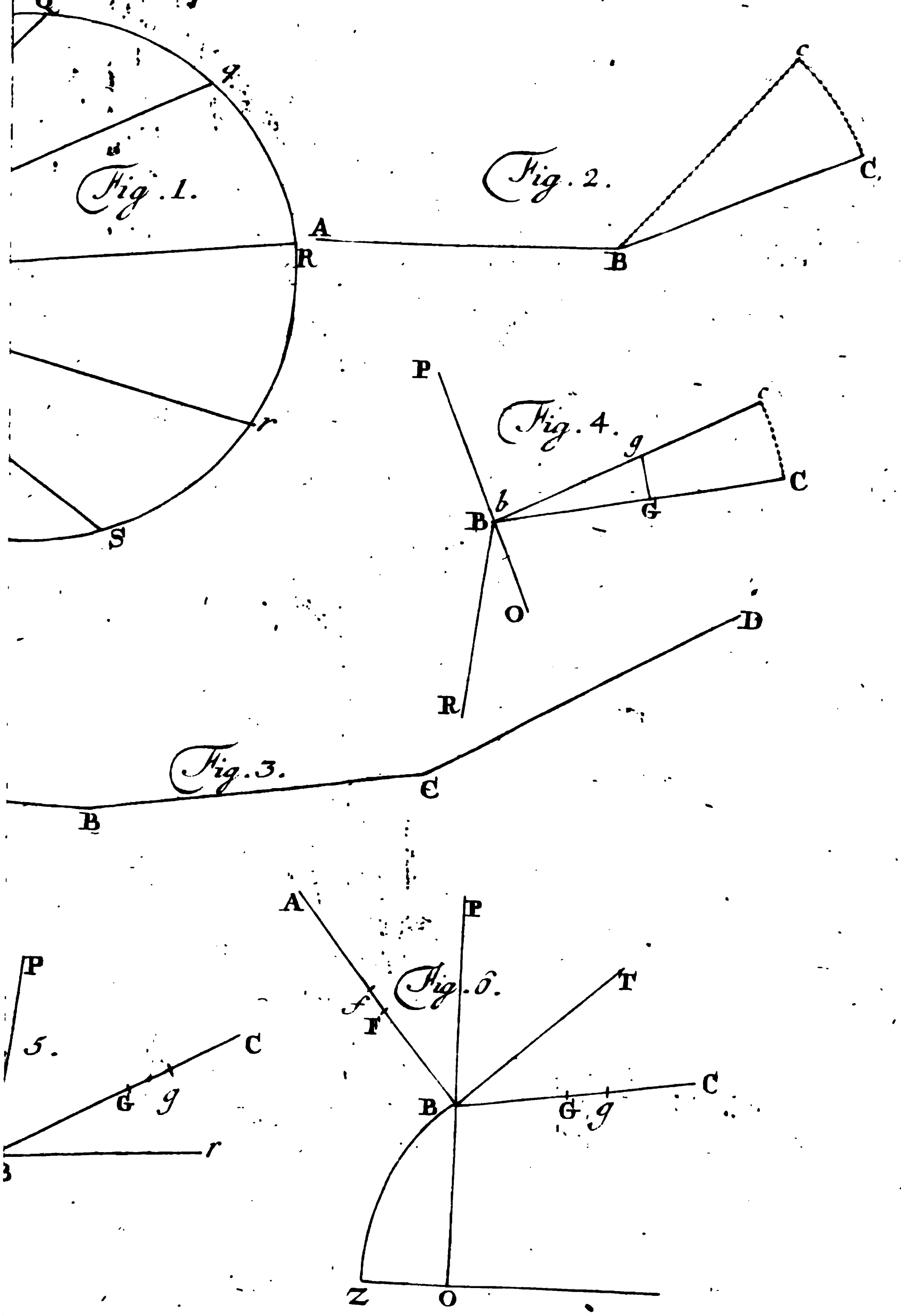

Fig. 1.
Q
q
A
R
r
S
Fig. 2.
c
C
B
Fig. 4.
P
c
g
C
b
B
G
O
R
D
Fig. 3.
C
B
A
P
Fig. 6.
f
F
T
C
B
G
g
Z
O
P
5.
C
G
g
r

Fig. 1.

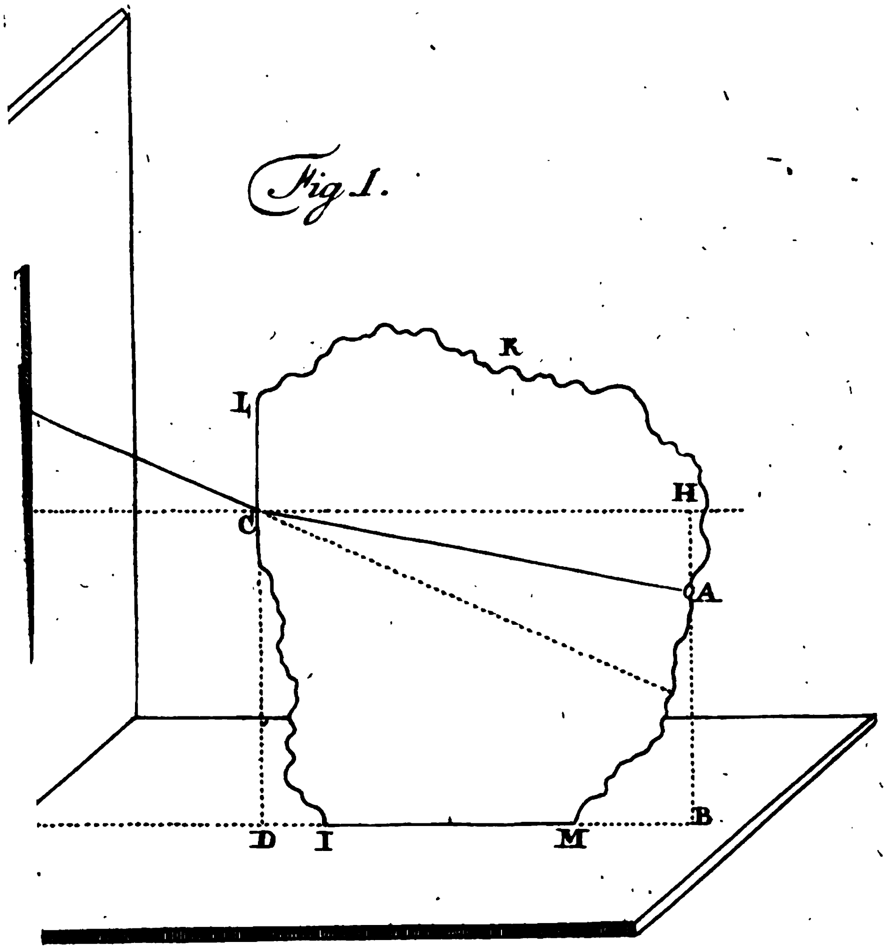


Fig. 2.

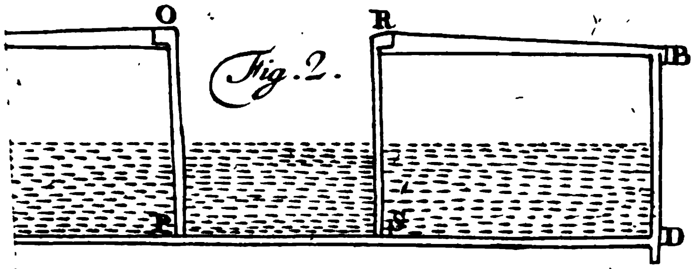
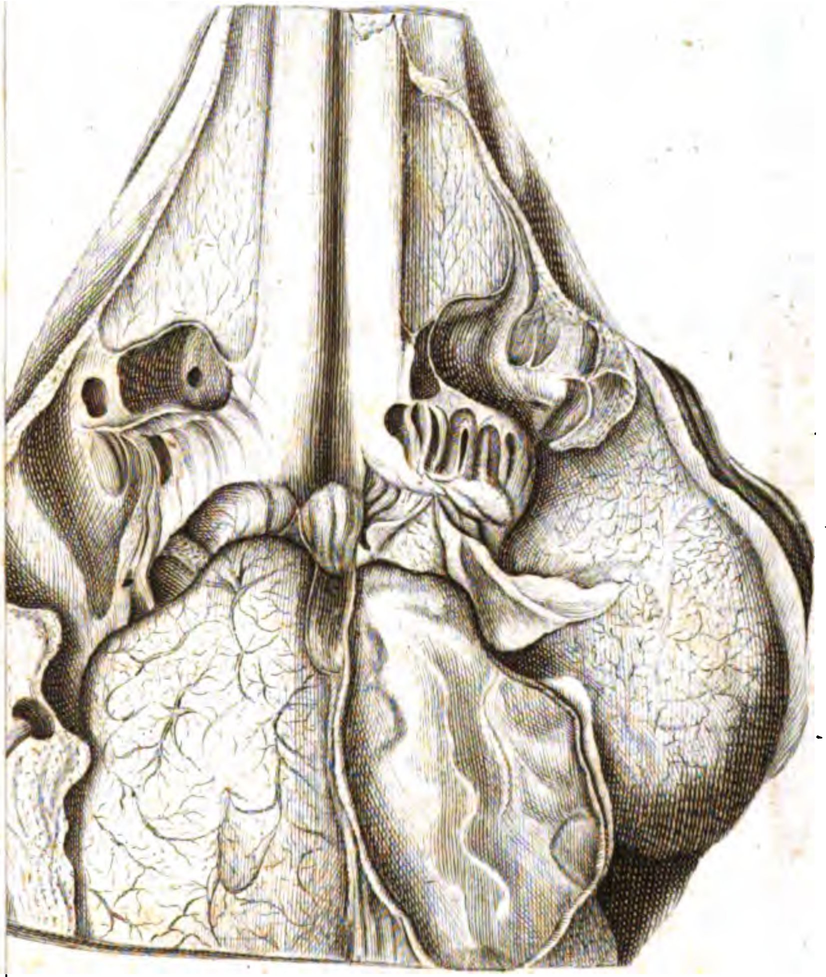
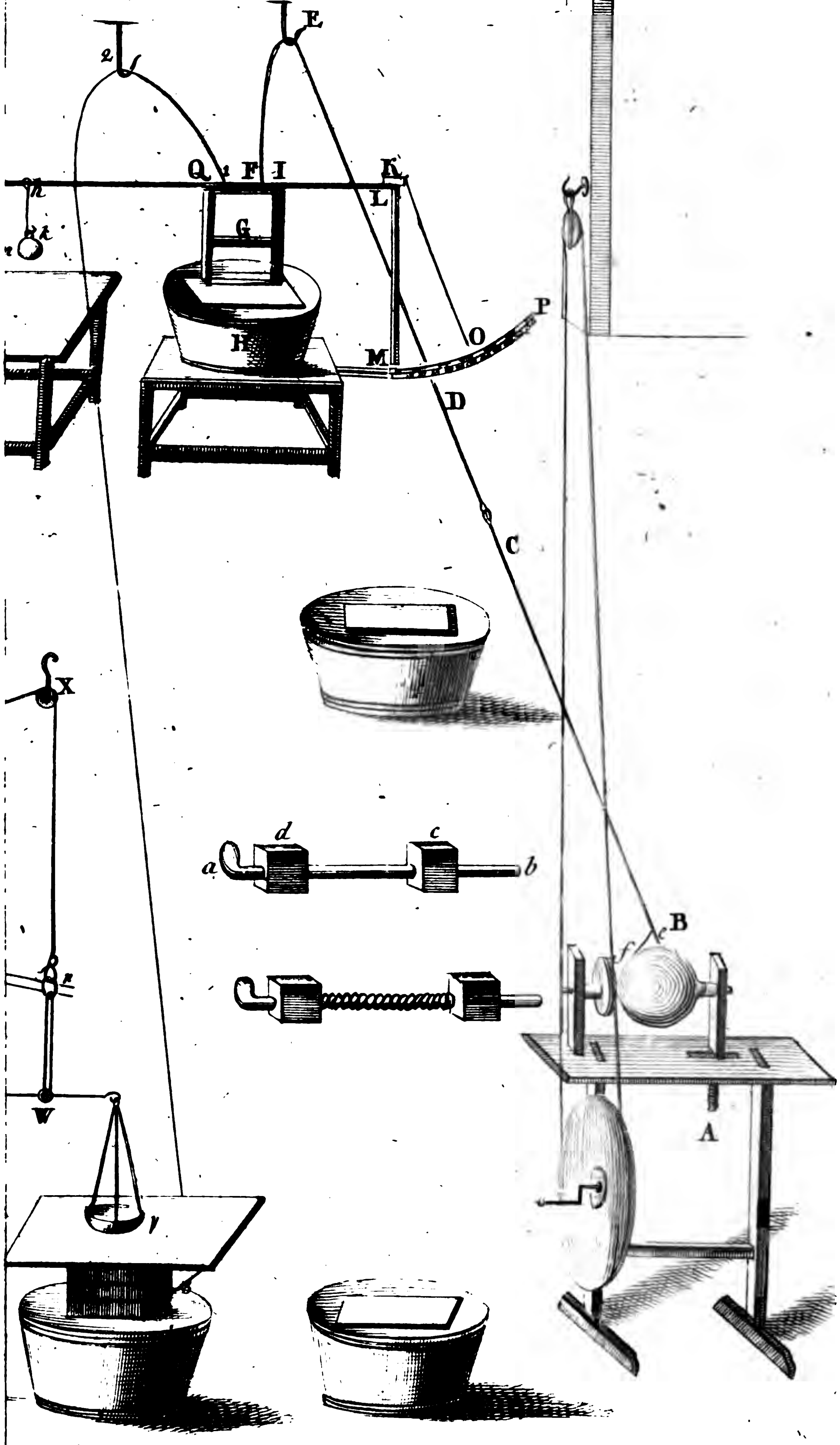


Fig. 1.



[redacted]


E
Q
F
I
K
L
G
H
M
O
P
D
C
X
W
γ
a
d
c
b
B
A



FL HELENA AVGVSTA
SECVRITAS REIPVBLICE
CON
ΤΡΑΝΚΥΑ
ΛΕΙΝΑ

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.

Widener Library
3 2044 092 615 301